ФГОС
ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия»

под редакцией академика РАН В.В. Козлова и академика РАО А.А. Никитина

для 11 класса общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2018

УДК 372.016:51*11(073)
ББК 74.262.21
М54

Авторы-составители:
В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин

М54 **Методическое** пособие к учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина для 11 класса общеобразовательных организаций / авт.-сост. В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др. — М.: ООО «Русское слово – учебник», 2018. — 320 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

Методическое пособие соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования по математике. Адресовано учителям математики общеобразовательных организаций для проведения уроков по предмету «Математика» в 11 классе.

УДК 372.016:51*11(073)
ББК 74.262.21

I. ВВЕДЕНИЕ

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности и учитывают психологические особенности обучающихся. В каждой школе встречаются обучающиеся с разными способностями к изучению математики, однако не везде имеются возможности для организации специализированного обучения. Поэтому целесообразно применять учебники, включающие в себя различные уровни изложения материала.

Авторским коллективом профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета, научных сотрудников Института педагогических исследований одарённости детей РАО реализована идея трёхуровневого преподавания математики в общеобразовательной школе с 5 по 11 класс в рамках единой концепции.

Остановимся на основных принципах этой концепции.

Математика — единая наука: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, начала математического анализа и так далее являются зависимыми друг от друга дисциплинами.

Математика тесно связана с различными науками. Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяет предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально.

Математика является важным элементом общей человеческой культуры и в значительной мере — одним из видов искусства. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика имеет свои законы развития и в силу того, что разрабатывает математический аппарат, который может применяться в различных сферах человеческой деятельности, носит абстрактный характер. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты.

Многие математические понятия и методы не могут быть восприняты сразу. Поэтому важное значение имеет обучение по спирали, когда систематическое возвращение к фундаментальным математическим понятиям позволяет постепенно переходить от наблюдений и экспериментов к точным формулировкам и доказательствам.

В связи с природными различиями в склонностях и способностях целесообразно проводить преподавание математики по нескольким уровням.

Первый уровень — общегуманитарный — предполагает овладение таким минимумом знаний, который необходим каждому культурному человеку.

Второй уровень — технологический — должен обеспечить умения и навыки, которые позволят успешно обучать и в старшей школе, и в вузе.

Третий уровень – специализированный. На этом уровне следует стремиться к воспитанию профессионального интереса к математике и сознательному овладению логикой рассуждений, что необходимо для обучения на математическом или близких к нему профилях старшей школы, осуществляя тем самым подготовку к последующему обучению в вузе.

Общая характеристика учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия»

Учебный предмет «Математика» является обязательным общеобразовательным предметом. Согласно учебному плану учебный предмет «Математика» изучается на двух уровнях – базовом или углублённом – в зависимости от образовательных потребностей обучающихся.

Следуя идее трёхуровневого обучения, учебный предмет «Математика» является интегрированным учебным предметом, в котором параллельно изучаются «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия (стереометрия)».

Основной целью обучения математике на **базовом уровне** является формирование общей культуры, что, в свою очередь, связано с развивающими и воспитательными целями современного образования, с социализацией личности и самоопределением дальнейшего жизненного пути старшеклассника. Изучение математики на базовом уровне нацелено на овладение целостной системой математических знаний, которая необходима каждому человеку, планирующему продолжить образование в областях, не связанных с математикой.

Углублённый уровень изучения математики нацелен на получение образования в соответствии со способностями и потребностями обучающихся, с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования. Изучение математики на углублённом уровне способствует завершению формирования у обучающихся целостной системы математических знаний и умений как основы для продолжения образования в областях, связанных с математикой и её применением.

Математическая подготовка обучающихся на углублённом уровне открывает дополнительные возможности для совершенствования интеллектуальных и творческих способностей старшеклассников за счёт использования таких характерных для высшей школы видов учебной деятельности, как подготовка и защита исследовательских проектов, семинары, выполнение типовых расчётов и т.д. А это, в свою очередь, даёт возможность для развития исследовательских умений и навыков, формирования культуры мышления, совершенствование математического языка

Изучение математики на базовом уровне направлено на достижение следующих целей:

— овладение системой математических понятий, основных формул, законов и методов, изучаемых в старшей общеобразовательной школе;

— осознание роли математики в описании и исследовании реальных процессов и явлений, формирование представлений об идеях и методах математики; представление о математическом моделировании и возможностях его применения;

— овладение математической терминологией и символикой, понятиями и принципами математического доказательства;

— создание условий для формирования умения выдвигать гипотезы, логически обосновывать суждения, понимать необходимость их проверки;

— формирование умений выполнять точные и приближённые вычисления, преобразовывать числовые и буквенные выражения; решать уравнения и неравенства, их системы; решать текстовые задачи; исследовать функции и строить их графики;

— понимание вероятностного характера окружающего мира; умение оценивать вероятности наступления событий в простейших ситуациях;

— формирование способности применять освоенные учебные действия для решения различных задач, в том числе задач прикладного характера и задач из смежных дисциплин;

— развитие способностей изображать плоские и пространственные геометрические фигуры, их комбинации; чтение геометрических чертежей; описание свойств геометрических фигур и их комбинаций;

— развитие логики, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для продолжения образования в областях, не требующих специализированной математической подготовки.

На **углублённом уровне** к перечисленным выше целям добавляются следующие:

— становление мотивации к самообразованию и последующему изучению математики в учреждениях высшего профессионального образования;

— овладение структурой доказательных рассуждений, логического обоснования доказательств, самостоятельное проведение доказательных рассуждений в ходе решения задач на доказательство, построения, вычисление;

— овладение основными понятиями и методами математического анализа, теории вероятностей и статистики;

— формирование способности применять полученные знания и приобретённые учебные действия для описания и анализа различных ситуаций реальной жизни;

— формирование готовности к решению задач из различных разделов математики и смежных учебных предметов, к проектной и исследовательской деятельности, в том числе при решении нестандартных и прикладных задач;

— овладение навыками использования компьютерных программ при решении математических задач, в том числе для поиска и иллюстрации хода решения

Место учебного предмета «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» в учебном плане

Учебный план на изучение математики на базовом уровне в старшей общеобразовательной школе отводит 4 учебных часа в неделю в течение каждого года обучения. Всего не менее 140 учебных часов за каждый год обучения.

Учебный план на изучение математики на углублённом уровне отводит 6 учебных часов в неделю, то есть всего не менее 204 в течение всего года обучения.

При организации обучения по трёхуровневой программе рекомендуется отводить 6 учебных часов в неделю, то есть всего не менее 408 уроков за два года обучения) на втором уровне обучения по программе.

Особенности курса «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» в старшей школе

Учебно-методический комплект (далее УМК) по математике для 10–11 классов создан на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, а также с учётом преемственности с Примерной программой среднего общего образования и является продолжением линии учебников издательства «Русское слово» для 5–9 классов по математике.

Содержание математического образования на ступени среднего общего образования представлено в виде следующих содержательных разделов: **числовые системы; элементарные функции; начала математического анализа; вероятность и статистика; геометрия (стереометрия).** Наряду с этим в содержание математического образования включены два дополнительных раздела: **аксиоматические основы математики; предел и непрерывность.** Содержание каждого из этих разделов отражает принципиальные особенности современной математики и предназначено для подготовки обучающихся к продолжению обучения в вузах.

Представления об аксиоматическом методе, в частности знакомство с элементами неевклидовой геометрии Лобачевского, о комплексных числах и их геометрической интерпретации прописаны в Фундаментальном ядре содержания общего образования как одни из *основных элементов научного знания.*

Раздел «**Числовые системы**» рассчитан на ознакомление обучающихся с историей развития теории числа, с алгебраическими и топологическими структурами в системах рациональных, действительных и комплексных чисел, на приложения к решению уравнений, неравенств, систем и прикладных задач, сводящихся к решению алгебраических уравнений.

Раздел **«Элементарные функции»** рассчитан на определение и изучение числовых функций, составляющих основу для моделирования многих процессов, происходящих в природе и в общественных отношениях. Данный раздел предполагает изучение степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических функций, а также правила преобразования выражений с радикалами, со степенями, с логарифмами, с тригонометрическими функциями и обратными к ним функциями.

Раздел **«Начала математического анализа»** рассчитан на ознакомление обучающихся с общими приёмами и методами анализа функций, выявления характерных особенностей в поведении графиков функций, что связано с теорией пределов и элементами дифференциального и интегрального исчисления.

Раздел **«Вероятность и статистика»** содержит материал, необходимый для формирования у обучающихся последовательного отношения к абсолютному большинству процессов, происходящих в природе, обществе, экономике и других сферах деятельности человека. Содержание данного раздела предназначено для выработки навыков и умений воспринимать информацию, представленную в различных формах (последовательности данных, таблицы, графики и т.д.), понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты.

Цель изучения раздела **«Геометрия (стереометрия)»** — развить у обучающихся пространственное воображение и логическое мышление путём систематического изучения свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве и применения этих свойств при решении задач.

Раздел **«Аксиоматические основы математики»** рассчитан на ознакомление обучающихся с аксиоматическим подходом к построению математических теорий, позволяет придать математическую строгость таким понятиям, как теорема и выводимость. Существенная роль при этом отводится иллюстрации аксиоматического подхода на знакомых обучающимся объектах.

Раздел **«Предел и непрерывность»** рассчитан на ознакомление обучающихся с идеологией приближения и непрерывности на уровне, который в значительной степени соответствует уровню изучения теории пределов и непрерывности в высшей школе.

Особенности обучения по УМК «Математика» для 11 класса общеобразовательных организаций под редакцией академика РАН В.В. Козлова и академика РАО А.А. Никитина

В силу новизны трёхуровневой системы обучения рекомендуется с 5 по 11 класс изучать единый предмет «Математика» (интегрированный), в котором с 5 по 9 класс параллельно изучаются разделы «Алгебра» и «Геометрия (планиметрия)», а с 10 по 11 класс изучаются разделы «Алгебра и начала математического анализа» и «Геометрия (стереометрия)».

Раздел «**Алгебра и начала математического анализа**» рассчитан на введение и изучение числовых функций, на ознакомление обучающихся с общими приёмами и методами анализа числовых функций, выявление характерных особенностей в поведении графиков функций. Этот раздел следует считать основой математического образования на ступени среднего общего образования.

Раздел «**Геометрия**» рассчитан на изучение пространственных фигур, развитие пространственного мышления, применение полученных знаний к решению задач практической направленности на вычисление длин, площадей и объёмов.

Система вопросов и заданий в курсе математики 10–11 классов позволяет учитывать возрастные и психологические особенности обучающихся, а также их индивидуальные интересы. Задачи способствуют развитию критического мышления, овладению приёмами анализа, синтеза, отбора и систематизации материала, формируют умение учиться и организовывать свою деятельность. Система тестовых заданий позволяет выявить степень усвоения изученного материала. Содержание учебников «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» способствует развитию мотивации к учению, интеллектуальной и творческой деятельности.

Типология уроков

Система занятий по любому предмету обычно связана с крупной смысловой единицей — темой, в рамках которой учитель использует различные типы уроков. Предложенная классификация уроков в соответствии с ФГОС ООО позволяет чётко определять цель, задачи и структуру каждого урока, не препятствует использованию учителем различных педагогических технологий и выбору формы проведения урока (лекция, беседа, семинар и др.).

В дальнейшем будем использовать следующие типы уроков:

— урок освоения новых знаний и видов учебных действий;

— урок применения знаний и видов учебных действий;

— урок обобщения, систематизации и закрепления знаний и умений выполнять учебные действия;

— урок развивающего контроля;

— комбинированный урок.

Структура уроков

1. Урок освоения новых знаний и видов учебных действий

Данный тип урока используется:

— при освоении новых знаний и формировании новых видов учебных действий;

— при освоении новых знаний на основе уже сформированных видов учебных действий;

— при формировании новых видов учебных действий на основе имеющихся знаний.

Целью данного типа урока является формирование у обучающихся новых знаний и видов учебных действий в рамках некоторой учебной ситуации.

Деятельность учителя: создание условий для освоения обучающимися новых знаний и формирования умений выполнять учебные действия; формирования у обучающихся способностей к рефлексии.

Деятельность обучающегося: восприятие, осмысление, запоминание новых знаний и освоение новых видов учебных действий; формирование способностей к рефлексии.

2. Урок применения знаний и видов учебных действий

Целью данного типа урока является формирование у обучающихся способностей применять знания и/или учебные действия для решения практических задач.

Деятельность учителя: создание условий для практического применения обучающимися знаний и видов учебных действий; формирования у обучающихся способностей к рефлексии, коррекции знаний и умений выполнять учебные действия.

Деятельность обучающегося: закрепление знаний и умений выполнять учебные действия, фиксация и преодоление затруднений практического применения знаний и умений выполнять учебные действия.

3. Урок обобщения, систематизации и закрепления знаний и умений выполнять учебные действия

Целью данного типа урока является обобщение, систематизация и закрепление знаний и умений выполнять учебные действия каждым обучающимся по итогам изучения темы/раздела или крупного тематического блока в рамках учебного предмета.

Деятельность учителя: создание условий для организации обобщения, систематизации и закрепления знаний и умений выполнять учебные действия; выявление индивидуальных учебных достижений и затруднений обучающихся при выполнении учебных действий на основе сформированных знаний; формирование у обучающихся способностей к рефлексии, коррекции знаний и умений выполнять учебные действия.

Деятельность обучающегося: обобщение, систематизация и закрепление знаний и умений выполнять учебные действия; самоанализ и самооценка индивидуальных учебных достижений.

4. Урок развивающего контроля

Целью данного типа урока является осуществление контроля за способностями обучающихся применять новые знания и умением выполнять учебные действия при помощи диагностирующих заданий, а также формирование способности обучающихся к самооценке и самоанализу.

Урок развивающего контроля предполагает организацию учебного взаимодействия в два этапа.

1-й этап

Организация индивидуального написания обучающимися контрольной работы; предоставление обучающимся возможности проведения самооценки своих работ по заранее обоснованному критерию.

2-й этап

Сопоставление обучающимся результатов своей работы с эталоном (готовым образцом выполнения работы) и самоанализ (взаимоанализ) деятельности. Определение места затруднения, выявление и фиксирование причины затруднения в учебной деятельности и выработка алгоритмов коррекции этих затруднений.

Деятельность учителя: создание условий для мотивации обучающихся к осуществлению контроля уровня усвоения знаний и сформированности умений выполнять учебные действия; контроль уровня усвоения знаний и сформированности умений выполнять учебные действия; уточнение алгоритмов устранения затруднений в учебной деятельности; анализ последовательности выполнения коррекционной работы обучающимися.

Деятельность обучающегося: выполнение диагностирующих заданий; самопроверка и взаимопроверка результатов выполнения диагностирующих заданий; выявление причин затруднений в учебной деятельности, выработка и применение алгоритмов коррекции этих затруднений; рефлексия учебной деятельности.

5. Комбинированный урок

Целью данного типа урока является создание ситуации, при которой учитель имеет возможность наряду с освоением обучающимися новых знаний и видов учебных действий провести закрепление и коррекцию усвоенных ранее знаний и видов учебных действий.

Структура урока формируется в зависимости от цели деятельности учителя на основе структуры разных типов уроков.

Деятельность учителя: создание условий для организации повторения, закрепления и коррекции усвоенных знаний и видов учебных действий; создание условий для освоения обучающимися новых знаний и видов учебных действий; формирование у обучающихся способностей к коррекционной деятельности и рефлексии.

Деятельность обучающегося: закрепление знаний и умений выполнять учебные действия; восприятие, осмысление, запоминание новых знаний и освоение новых видов учебных действий; фиксирование и преодоление затруднений применения знаний и умений выполнять учебные действия.

Формы организации учебной деятельности

Для более полного охвата разнообразных по своему назначению уроков, которые конструируются в практике обучения, их разделяют не только по типам, но и по видам. Деление уроков на виды наиболее целесообразно осуществлять по характеру деятельности учителя и обучающихся. При этом подразделение на виды происходит для каждого типа урока в рамках используемой типологии.

Так, например, уроки развивающего контроля, являющиеся одним из элементов типологии по основным этапам учебного процесса, подразделяются на следующие виды: уроки устного опроса; письменного опроса, зачёты, лабораторные и практические работы, самостоятельные и контрольные работы, сочетание разных видов. Подразделение уроков на типы и виды тем не менее не делает полными имеющиеся типологии.

Урок-лекция. Как правило, это уроки, на которых излагается значительная часть теоретического материала изучаемой темы. В зависимости от дидактических задач и логики учебного материала распространены вводные, обзорные, обобщающие, мини-лекции, кино(видео)лекции и инструктивные лекции.

По характеру изложения материала и деятельности обучающихся лекция может быть информационной, объяснительной, лекцией-беседой и т.д.

Лекционная форма проведения уроков целесообразна при:

— изучении нового материала, мало связанного с ранее изученным;

— рассмотрении сложного для самостоятельного изучения материала;

— подаче информации крупными блоками, в плане реализации теории укрупнения дидактических единиц в обучении;

— применении изученного материала при решении практических задач.

Структура лекции определяется выбором темы и цели урока. Другими словами, лекция строится на сочетании этапов урока: организации; постановки цели и актуализации знаний; сообщении знаний учителем и усвоении их обучающимися; определении домашнего задания.

Урок-семинар. Семинары характеризуются, прежде всего, двумя взаимосвязанными признаками: самостоятельным изучением обучающимися программного материала и обсуждением на уроке результатов их учебно-познавательной деятельности. На них ученики учатся выступать с самостоятельными сообщениями, дискутировать, отстаивать свои суждения. Семинары способствуют развитию познавательных и исследовательские умений обчающихся, повышению культуры общения.

Различают уроки-семинары по учебным задачам, источникам получения знаний, формам их проведения и т.д. В практике обучения получили распространение семинары — развёрнутые беседы, семинары-доклады, рефераты, творческие письменные работы, комментированное чтение, семинар — решение задач, семинар-диспут, семинар-конференция и т.д.

Укажем основные случаи, когда предпочтительнее организовывать уроки в форме семинаров:

— при изучении нового материала, если он доступен для самостоятельной проработки обучающимися;

— после проведения вводных, установочных и текущих лекций;

— при обобщении и систематизации знаний и умений обучающихся по изучаемой теме;

— при проведении уроков, посвящённых различным методам решения задач, выполнения заданий и упражнений и т.д.

Семинар проводится со всем составом обучающихся. Учитель заблаговременно определяет тему, цель и задачи семинара, планирует его проведение, формулирует основные и дополнительные вопросы по теме, распределяет задания между обучающимися с учётом их индивидуальных возможностей, подбирает литературу, проводит групповые и индивидуальные консультации, проверяет конспекты. Получив задание, обучающиеся с помощью памяток «Как конспектировать источники», «Как готовиться к выступлению», «Как готовиться к семинару», «Памятки докладчика» оформляют результаты самостоятельной работы в виде плана или тезисов выступлений, конспектов основных источников, докладов и рефератов.

Семинарское занятие начинается вступительным словом учителя, в котором он напоминает задачу семинара, порядок его проведения, рекомендует, на что необходимо обратить особое внимание, что следует записать в рабочую тетрадь, даёт другие советы. Далее обсуждаются вопросы семинара в форме дискуссии, развёрнутой беседы, сообщений, чтения первоисточников с соответствующими комментариями, докладов, рефератов и т.д.

Затем учитель дополняет сообщения учеников, отвечает на их вопросы и даёт оценку их выступлениям. Подводя итоги, отмечает положительное, анализирует содержание, форму выступлений обучающихся, указывает на недостатки и пути их преодоления.

Проведение семинаров может быть составной частью лекционно-семинарской системы обучения, расширяющей область их применения. Это подтверждается, например, возможностью её применения в такой разновидности совместной учебной деятельности учителя и обучающихся, как «погружение».

Урок-зачёт. Одной из форм организации контроля результатов освоения ООП обучающимися является урок-зачёт. Основная цель его состоит в диагностике уровня усвоения знаний и умений каждым обучающимся на определённом этапе обучения. Положительная отметка за зачёт выставляется в случае, если ученик справился со всеми заданиями, соответствующими уровню обязательной подготовки по изучаемому предмету. Если хотя бы одно из таких заданий осталось невыполненным, то, как правило, положительная оценка не выставляется. В этом случае зачёт подлежит пересдаче, причём ученик может пересдать не весь зачёт целиком, а только те виды заданий, с которыми он не справился.

Практикуются различные виды зачётов: текущий и тематический, зачёт-практикум, дифференцированный зачёт, зачёт-экстерн и т.д. При их проведении используются различные формы организации деятельности учителя и обучающихся: зачёт в форме экзамена, ринга, конвейера общественного смотра знаний, аукциона и т.д. Если обучающимся предварительно сообщают примерный перечень заданий, выносимых на зачёт, то его принято называть открытым, в противном случае — закрытым. Чаще же предпочтение отдаётся зачётам открытым с целью определения результатов изучения наиболее важных тем учебного предмета.

В качестве примера рассмотрим возможные основные этапы подготовки и проведения открытого тематического зачёта.

Такой зачёт проводится как завершающая проверка в конце изучаемой темы. Приступая к её изложению, учитель сообщает о предстоящем зачёте, его содержании, особенностях организации и сроках сдачи. Для проведения зачёта из числа наиболее подготовленных обучающихся выбираются консультанты. Они помогают распределить учеников по группам в 3—5 человек, готовят учётные карточки для своих групп, в которых будут фиксироваться отметки за выполнение учениками каждого задания и итоговые отметки за зачёт. Задания готовятся двух видов: основные, соответствующие обязательному уровню подготовки обучающихся, и дополнительные, выполнение которых вместе с основными необходимо для получения хорошей или отличной отметки.

Каждому ученику (кроме тех, кто выступает в роли консультантов) готовятся индивидуальные задания, включающие основные и дополнительные вопросы и упражнения. В начале зачёта, как правило, на спаренном уроке ученики получают свои задания и приступают к их выполнению. В это время учитель проводит собеседование с консультантами. Он проверяет и оценивает их знания, а затем ещё раз разъясняет методику проверки заданий, в особенности основных.

На следующем этапе урока консультанты приступают к проверке выполнения заданий в своих группах, а учитель выборочно из разных групп проверяет, в первую очередь, работы обучающихся, справившихся с основными заданиям и приступивших к выполнению дополнительных заданий.

В заключительной части урока завершается оценка каждого задания выставлением отметок в учётные карточки групп, учитель на основе выставленных отметок выводит итоговые отметки каждому ученику и подводит общие итоги зачёта.

Урок-практикум. Уроки-практикумы, помимо решения своей специальной задачи — усиления практической направленности обучения, должны быть тесным образом связаны с изученным материалом, а также способствовать прочному, неформальному его усвоению. Основной формой их проведения являются практические и лабораторные работы, на которых обучающиеся самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений.

Главное их различие состоит в том, что на лабораторных работах доминирующей составляющей является процесс формирования экспериментальных умений обучающихся, а на практических работах — конструктивных. Следует отметить, что учебный эксперимент как метод самостоятельного приобретения знаний обучающимися хотя и имеет сходство с научным экспериментом, вместе с тем отличается от него постановкой цели, уже достигнутой наукой, но неизвестной учащимся.

Различают установочные, иллюстративные, тренировочные, исследовательские, творческие и обобщающие уроки-практикумы. Основным же способом организации деятельности обучающихся на практикумах является групповая форма работы. При этом каждая группа из двух-трёх человек выполняет, как правило, отличающуюся от других практическую или лабораторную работу.

Средством управления учебной деятельностью обучающихся при проведении практикума служит инструкция, которая по определённым правилам последовательно устанавливает действия ученика.

Структура уроков-практикумов:

1. Сообщение темы, цели и задач практикума.
2. Актуализация опорных знаний и умений обучающихся.
3. Мотивация учебной деятельности обучающихся.
4. Ознакомление учеников с инструкцией.
5. Подбор необходимых дидактических материалов, средств обучения и оборудования.
6. Выполнение работы обучающимися под руководством учителя.
7. Доставление отчёта.
8. Обсуждение и теоретическая интерпретация полученных результатов работы.

Урок-дискуссия. Основу уроков-дискуссий составляют рассмотрение и исследование спорных вопросов, проблем, различных подходов при аргументации суждений, решении заданий и т.д.

Различают:

— дискуссии-диалоги, когда урок компонуется вокруг диалога двух его главных участников;

— групповые дискуссии, когда спорные вопросы решают в процессе групповой работы;

— массовые дискуссии, когда в полемике принимают участие все обучающиеся класса.

При подготовке урока-дискуссии учитель должен чётко сформулировать задание, раскрывающее сущность проблемы и возможные пути её решения. В случае необходимости участникам предстоящей дискуссии надо ознакомиться с дополнительной литературой, заранее отобранной и предложенной учителем.

В начале урока обосновывается выбор темы или вопроса, уточняются условия дискуссии, выделяются узловые моменты обсуждаемой проблемы. Главный момент дискуссии — непосредственный спор её участников. Необходимо размышлять вместе с учениками, помогая при этом им формулировать свои мысли, и развивать сотрудничество между собой и ими.

В ходе дискуссии не надо добиваться единообразия оценок. Однако по принципиальным вопросам следует вносить ясность. Особняком стоит вопрос о культуре дискуссии. Оскорбления, упрёки, недоброжелательность в отношении к своим товарищам не должны присутствовать в споре. Крик, грубость чаще всего возникают тогда, когда в основе дискуссии лежат не факты или закономерности, а только эмоции. При этом часто её участники не владеют предметом спора и «говорят на разных языках». Формированию культуры дискуссии могут помочь следующие правила:

— вступая в дискуссию, необходимо представлять предмет спора;

— в споре не допускать тона превосходства;

— грамотно и чётко ставить вопросы;

— формулировать главные выводы.

Момент окончания дискуссии следует выбирать так, чтобы предупредить повторение уже сказанного, ибо это отрицательно влияет на поддержание интереса обучающихся к рассматриваемым на уроке проблемам. Завершив дискуссию, необходимо подвести её итоги: оценить правильность формулировки и употребления понятий, глубину аргументов, умение использовать приёмы доказательств, опровержений, выдвижения гипотез, культуру дискуссии. На этом этапе обучающиеся получают за дискуссию отметки, но при этом не надо снижать отметку за то, что ученик отстаивал неверную точку зрения.

На заключительном этапе урока можно не только систематизировать возможные пути решения обсуждаемой проблемы, но и поставить связанные с ней новые вопросы, дающие пищу для новых раздумий обучающихся.

Следует отметить, что дискуссия является также одним из основных структурных компонентов урока-диспута, конференции, суда, заседания учёного совета и т.д.

Урок-консультация. На уроках данного типа проводится целенаправленная работа не только по ликвидации пробелов в знаниях обучающихся, обобщению и систематизации программного материала, но и по развитию их умений.

В зависимости от содержания и назначения выделяют тематические и целевые уроки-консультации. Тематические консультации проводятся либо по каждой теме, либо по наиболее значимым или сложным вопросам программного материала. Целевые консультации входят в систему подготовки, проведения и подведения итогов самостоятельных и контрольных работ, зачётов, экзаменов. Это могут быть уроки работы над ошибками, уроки анализа результатов контрольной работы или зачёта и т.д.

На консультации сочетаются различные формы работы с обучающимися, например, групповые и индивидуальные.

Подготовка к проведению урока-консультации осуществляется как учителем, так и обучающимися. Учитель наряду с логико-дидактическим анализом содержания изучаемого материала систематизирует затруднения, недочёты и ошибки в устных ответах и письменных работах обучающихся. На этой основе он уточняет перечень возможных вопросов, которые будут рассмотрены на консультации. Ребята приучаются, в свою очередь, готовиться к консультациям, сроки которых объявляются заранее, формулировать вопросы и задания, вызывающие у них затруднения. При этом возможно использование не только учебника, но и дополнительной литературы.

Накануне урока-консультации можно предложить обучающимся домашнее задание: подготовить по изучаемой теме карточки с вопросами и заданиями, с которыми они не могут справиться. Возможно несколько ситуаций при проведении урока-консультации:

1. Если учитель не получает вопросов, то он вначале предлагает обучающимся открыть учебник и, анализируя объяснительный текст и имеющиеся там задания, вскрывает вопросы, которые могли бы быть заданы учениками, но ускользнули от их внимания. Затем оставшаяся часть урока, наряду с отработкой подобных умений, посвящается разбору вопросов, подготовленных учителем.

2. Если ученики смогли приготовиться к уроку-консультации на основе материала учебника и подготовить такое число вопросов, что для ответов на них не хватит времени на уроке, учитель либо обобщает некоторые вопросы, либо отбирает наиболее значимые из них, перенося оставшиеся вопросы на последующие уроки.

3. Если вопросы обучающихся почерпнуты из дополнительной литературы, то, получая ответы на них, ученики понимают, что они зачастую заранее не были известны учителю. Учитель делает различные попытки найти верный ответ на вопрос, возможно, нащупывает такой путь далеко не сразу, иногда может ошибаться в своих гипотезах. В случае же, когда учитель не может сразу ответить на поставленный вопрос, поиск ответа на него становится общим делом в деятельности учителя и обучающихся после консультации.

В ходе урока-консультации учитель получает возможность выявить наиболее любознательных и пассивных, поддержать тех, кто испытывает затруднения, и помочь им. Последнее реализуется с применением индивидуальных и групповых форм работы, где помощниками могут быть консультанты из числа обучающихся, хорошо разобравшихся в вопросах по изучаемой теме.

Интегрированный урок. Интеграция даёт возможность, с одной стороны, показать учащимся «мир в целом», преодолев разобщённость научного знания по дисциплинам, а с другой — высвобождаемое за этот счёт учебное время использовать для полноценного осуществления профильной дифференциации в обучении.

Иначе говоря, с практической точки зрения интеграция предполагает усиление межпредметных связей, снижение перегрузок обучающихся, расширение сферы получаемой информации обучающимися, подкрепление мотивации обучения.

Методической основой интегрированного подхода к обучению является формирование знаний об окружающем мире и его закономерностях в целом, а также установление внутрипредметных и межпредметных связей в усвоении основ наук. В этой связи интегрированным уроком называют любой урок со своей структурой, если для его проведения привлекаются знания, умения и результаты анализа изучаемого материала методами других наук, других учебных предметов. Не случайно поэтому интегрированные уроки именуют ещё межпредметными, а формы их проведения самые разные: семинары, конференции, путешествия и т.д.

Наиболее общая классификация интегрированных уроков по способу их организации имеет следующий вид:

- конструирование и проведение урока двумя и более учителями разных дисциплин;
- конструирование и проведение интегрированного урока одним учителем, имеющим базовую подготовку по соответствующим дисциплинам;
- создание на этой основе интегрированных тем, разделов и, наконец, курсов.

Театрализованный урок. Выделение такого типа уроков связано с привлечением театральных средств, атрибутов и их элементов при изучении, закреплении и обобщении программного материала. Театрализованные уроки привлекательны тем, что вносят в ученические будни атмосферу праздника, приподнятое настроение, позволяют ребятам проявить свою инициативу, способствуют выработке у них чувства взаимопомощи, коммуникативных умений.

При подготовке таких уроков даже работа над сценарием и изготовление элементов костюмов становятся результатом коллективной деятельности учителя и обучающихся. Наполнение сценария фактическим материалом и его реализация на театрализованном уроке требует от обучающихся серьёзных усилий в работе с учебником, первоисточником, научно-популярной литературой, при изучении соответствующих исторических сведений, что, в конечном счёте, вызывает у них интерес к знаниям.

Непосредственно на самом уроке учитель выполняет лишь функции организатора представления. Оно начинается, как правило, со вступительного слова ведущего, обязанности которого не обязательно возлагаются на учителя. Само представление после информативной части может быть продолжено постановкой проблемных заданий, которые непосредственно подключают в активную работу на уроке остальных обучающихся.

В заключительной части представления желательно предусмотреть этап подведения итогов и связанную с ним тщательную подборку критериев оценок, учитывающих все виды деятельности обучающихся на уроке. Их основные положения должны быть заранее известны всем ученикам.

Урок-соревнование. Основу урока-соревнования составляют состязания команд при ответах на вопросы и решении чередующихся заданий, предложенных учителем или ведущим, выбранным из числе обучающихся.

Форма проведения таких уроков самая различная. Это поединок, эстафета, соревнования, построенные по сюжетам известных игр, например КВН, «Своя игра», «Звёздный час» и др.

В организации и проведении уроков-соревнований выделяют три основных этапа:

— подготовительный;

— игровой;

— подведение итогов.

Для каждого конкретного урока эта структура детализируется в соответствии с содержанием используемого материала и особенностями сюжета состязаний.

Урок с дидактической игрой. В отличие от игр вообще дидактическая игра обладает существенным признаком — наличием чётко поставленной цели обучения и соответствующего ей педагогического результата. Дидактическая игра имеет устойчивую структуру, включающую следующие основные компоненты: игровой замысел, правила, игровые действия, познавательное содержание или дидактические задачи, оборудование, результат игры.

Игровой замысел выражен, как правило, в названии игры. Он заложен в той дидактической задаче, которую надо решать на уроке, и придаёт игре познавательный характер, предъявляет к её участникам определённые требования в отношении знаний.

Правилами определяется порядок действий и поведения обучающихся в процессе игры, создаётся рабочая обстановка на уроке. Потому их разработка ведётся с учётом цели урока и возможностей обучающихся. В свою очередь, правилами игры создаются условия для формирования умений обучающихся управлять своим поведением.

Регламентированные правилами игровые действия способствуют познавательной активности обучающихся, дают им возможность проявить свои способности, применить знания и умения для достижения целей игры. Учитель, руководя игрой, направляет её в нужное дидактическое русло, при необходимости активизирует её ход, поддерживает интерес к ней.

Основой дидактической игры является познавательное содержание. Оно заключается в усвоении тех знаний и умений, которые применяются при решении учебной проблемы, поставленной игрой.

Оборудование игры в значительной мере включает в себя оборудование урока. Это и наличие технических средств обучения, и различные средства наглядности, и дидактические раздаточные материалы.

Дидактическая игра имеет определённый результат, который выступает прежде всего в форме решения поставленного задания и оценивания действий обучающихся, придаёт ей законченность. Все структурные элементы дидактической игры взаимосвязаны, и при отсутствии основных из них она либо невозможна, либо теряет свою специфическую форму, превращаясь в выполнение указаний, упражнений и т.п.

Целесообразность использования дидактических игр на разных этапах урока различна. При усвоении новых знаний возможности дидактических игр уступают более традиционным формам обучения. Поэтому их чаще применяют при проверке результатов обучения, выработке навыков, формировании умений. В этой же связи различают обучающие, контролирующие и обобщающие дидактические игры.

Отметим, что характерной особенностью урока с дидактической игрой является включение игры в его конструкцию в качестве одного из структурных элементов урока.

Дидактические игры при их систематическом использовании становятся эффективным средством активизации учебной деятельности школьников. Этим обусловлена необходимость накопления таких игр и их классификации по содержанию с использованием материалов соответствующих методических журналов и пособий.

Урок — деловая игра. В деловых играх на основе игрового замысла моделируются жизненные ситуации и отношения, в рамках которых выбирается оптимальный вариант решения рассматриваемой проблемы и имитируется его реализация на практике. Деловые игры делятся на производственные, организационно-деятельностные, проблемные, учебные и комплексные.

В рамках уроков чаще всего ограничиваются применением учебных деловых игр. Их отличительными свойствами являются:

— моделирование приближённых к реальной жизни ситуаций;

— поэтапное развитие игры, в результате чего выполнение предшествующего этапа влияет на ход следующего;

— наличие конфликтных ситуаций;

— обязательная совместная деятельность участников игры, выполняющих предусмотренные сценарием роли;

— использование описания объекта игрового имитационного моделирования;

— контроль игрового времени;

— элементы состязательности;

— правила, системы оценок хода и результатов игры.

Методика разработки деловых игр включает следующие этапы:

1) обоснование требований к проведению игры;

2) составление плана её разработки;

3) написание сценария, включая правила и рекомендации по организации игры;

4) подбор необходимой информации, средств обучения, создающих игровую обстановку;

5) уточнение целей проведения игры, составление руководства для ведущего, инструкций для игроков, дополнительный подбор и оформление дидактических материалов;

6) разработка способов оценки результатов игры в целом и её участников в отдельности.

Урок — ролевая игра. Специфика ролевой игры, в отличие от деловой, характеризуется более ограниченным набором структурных компонентов, основу которых составляют целенаправленные действия обучающихся в моделируемой жизненной ситуации в соответствии с сюжетом и распределёнными ролями.

Уроки — ролевые игры можно разделить по мере возрастания их сложности на три группы:

1) имитационные, направленные на имитацию определённого профессионального действия;

2) ситуационные, связанные с решением какой-либо узкой конкретной проблемы — игровой ситуации;

3) условные, посвящённые разрешению, например, учебных или производственных конфликтов и т.д.

Формы проведения ролевых игр могут быть самыми разными: воображаемые путешествия, дискуссии на основе распределения ролей, пресс-конференции, уроки-суды и т.д.

Методика разработки и проведения ролевых игр предусматривает включение в полной мере или частично следующих этапов:

1) подготовительный;
2) игровой;
3) заключительный;
4) анализ результатов.

На подготовительном этапе решаются вопросы как организационные, так и связанные с предварительным изучением содержательного материала игры.

Организационные вопросы: распределение ролей, выбор жюри или экспертной группы, формирование игровых групп, ознакомление с обязанностями.

Предваряющие вопросы: знакомство с темой, проблемой, ознакомление с инструкциями / заданиями, сбор и анализ материала; подготовка сообщения, изготовление наглядных пособий и консультации.

Игровой этап характеризуется включением в проблему и осознанием проблемной ситуации в группах и между группами.

Внутригрупповой аспект: индивидуальное понимание проблемы; дискуссия в группе, выявление позиций; принятие решения; подготовка сообщения.

Межгрупповой: заслушивание сообщений групп, оценка решения.

На заключительном этапе вырабатываются решения по проблеме, заслушивается сообщение экспертной группы, выбирается наиболее удачное решение. При анализе результатов ролевой игры определяется степень активности участников, уровень знаний и умений, вырабатываются рекомендации по совершенствованию игры. Проведение ролевой игры, как и всякой другой, построенной на использовании имитации, связано с преодолением трудностей, заложенных в её противоречивом характере. Противоречивость ролевой игры заключается в том, что в ней всегда должны иметь место и условность, и серьёзность. Кроме того, она проводится в соответствии с определёнными правилами, предусматривающими элементы импровизации. Если хотя бы один из этих факторов отсутствует, игра не достигает цели.

Описание учебно-методического обеспечения образовательной деятельности

Оснащение образовательного процесса должно обеспечивать возможность:

— достижения планируемых результатов освоения основной образовательной программы основного общего образования всеми обучающимися;

— развития личности, способностей, удовлетворения познавательных интересов, самореализации обучающихся, в том числе одарённых и талантливых, через организацию учебной и внеурочной деятельности, социальной практики, общественно полезной деятельности, через систему кружков, секций, студий;

— овладения обучающимися ключевыми компетенциями, составляющими основу дальнейшего успешного образования и ориентации в мире профессий;

— индивидуализации процесса образования посредством проектирования и реализации индивидуальных образовательных планов обучающихся, обеспечения их эффективной самостоятельной работы;

— формирования у обучающихся опыта самостоятельной образовательной, общественной, проектно-исследовательской деятельности;

— включения обучающихся в проектную и учебно-исследовательскую деятельность;

— проектирования и конструирования, управления объектами, программирования;

— создания обучающимися материальных и информационных объектов.

В состав обязательного программно-методического обеспечения кабинета математики входят стандарты по математике, примерные программы, авторские программы.

В библиотечный фонд включаются комплекты учебников, рекомендованных или допущенных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе.

Также в состав библиотечного фонда целесообразно включать:

1. Программы курсов, авторские программы по различным курсам математики.
2. Рабочие тетради.
3. Дидактические материалы.
4. Сборники контрольных и самостоятельных работ.
5. Практикумы по решению задач, соответствующие используемым комплектам учебников.
6. Сборники разноуровневых познавательных и развивающих заданий.
7. Сборники заданий (в том числе в тестовой форме), обеспечивающих диагностику и контроль качества обучения в соответствии с планируемыми результатами освоения основной образовательной программы.
8. Справочные пособия (энциклопедии, словари, справочники по математике и т.п.).
9. Методические пособия для учителя и др.

В фондах библиотеки образовательного учреждения может содержаться научная и научно-популярная литература, необходимая для подготовки докладов, сообщений, рефератов, творческих работ.

Описание материально-технического обеспечения образовательной деятельности

Оснащение учебных кабинетов должно обеспечиваться оборудованием автоматизированных рабочих мест педагога и обучающихся, а также набором традиционной учебной техники для обеспечения образовательного процесса. Автоматизированное рабочее место (АРМ) включает не только собственно компьютерное рабочее место, но и специализированное цифровое оборудование, а также программное обеспечение и среду сетевого взаимодействия, позволяющие педагогу и обучающимся наиболее полно реализовать профессиональные и образовательные потребности.

Потребность использования АРМ обучающихся при изучении различных предметных областей определяет организационную модификацию данного комплекта: организация стационарных автоматизированных рабочих мест обучающихся либо комплект общешкольного оснащения.

Традиционные средства обучения по математике (объёмные и плоскостные пособия, макеты, таблицы и др.) используются самостоятельно, а также совместно со средствами ИКТ и повышают их функциональность и эффективность использования в образовательном процессе.

Рекомендуемое оснащение учебных кабинетов математики для основной ступени общего образования:

1. Технические средства обучения

Специализированный программно-аппаратный комплекс педагога и обучающегося (СПАК) является составной частью информационно-образовательной среды образовательного учреждения, обеспечивает решение профессиональных задач педагога с применением информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). СПАК должен обеспечивать сетевое взаимодействие всех участников образовательного процесса. В СПАК входят:

1. Персональный или мобильный компьютер (ноутбук) с предусмотренным программным обеспечением.
2. Интерактивное оборудование: интерактивная доска, проектор мультимедийный, визуализатор цифровой.
3. Оборудование для тестирования качества знаний обучающихся.
4. Копировально-множительная техника (печатное, копировальное, сканирующее устройства).
5. Прочие устройства.
6. Универсальная платформа для перемещения, хранения и подзарядки портативных компьютеров, прочего оборудования.

2. Печатные пособия

Таблицы по математике должны содержать правила действий с числами, таблицы метрических мер, основные сведения о плоских и пространственных геометрических фигурах, основные математические формулы, соотношения, законы, графики функций. В кабинете математики должны находиться портреты математиков, вклад которых в развитие математики отражён в стандарте.

3. Электронные средства обучения

Могут состоять из учебной техники, обеспечивающей визуально-звуковое представление объекта изучения, мультимедийных обучающих программ и электронных учебных заданий по основным разделам курса математики. Мультимедийные обучающие программы, электронные образовательные ресурсы (ЭОР) и электронные учебные издания могут быть ориентированы на систему дистанционного обучения либо носить проблемно-тематический характер и обеспечивать дополнительные условия для изучения отдельных тем и разделов стандарта.

В обоих случаях эти пособия должны предоставлять техническую возможность построения системы текущего и итогового контроля уровня подготовки обучающихся (в том числе в форме тестового контроля).

4. Учебно-практическое и учебно-лабораторное оборудование

Целесообразно, чтобы в состав учебно-практического и учебно-лабораторного оборудования входили:

1. Аудиторная доска с магнитной поверхностью и набором приспособлений для крепления таблиц.
2. Доска магнитная с координатной сеткой.
3. Комплект инструментов, предназначенных для работы у доски: линейка, транспортир, угольник (30°, 60°), угольник (45°, 45°), циркуль.
4. Комплект стереометрических тел (демонстрационный), комплект стереометрических тел (раздаточный), набор планиметрических фигур.

При организации деятельности обучающихся должны активно использоваться информационные технологии: мультимедийные программы, электронные справочники и энциклопедии, обучающие компьютерные программы, электронные библиотеки, которые включают комплекс информационно-справочных материалов, объединённых единой системой навигации и ориентированных на различные формы познавательной деятельности, в том числе исследовательскую проектную работу.

В состав электронных библиотек могут входить тематические базы данных, фотографии, видео, анимация, таблицы, схемы, диаграммы и графики.

II. ПРИМЕР РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

1. Планируемые результаты освоения обучающимися основной общеобразовательной программы среднего общего образования

Изучение математики по УМК «Математика» для 11 класса в старшей общеобразовательной школе даёт возможность обучающимся достичь личностных, метапредметных и предметных результатов.

Личностные результаты обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию обучающихся, установление обучающимися связи между учебной деятельностью и её мотивом. К личностным результатам освоения старшеклассниками программы относятся:

— российская гражданская идентичность, в том числе патриотизм, уважение к Отечеству, чувство ответственности и долга перед Родиной, идентификация себя в качестве гражданина России;

— готовность и способность обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

— готовность и способность к осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентирования в мире профессий и профессиональных предпочтений, с учётом устойчивых познавательных интересов;

— развитое моральное сознание и компетентность в решении моральных проблем на основе личностного выбора, формирование нравственных чувств и нравственного поведения, осознанного и ответственного отношения к собственным поступкам;

— способность к нравственному самосовершенствованию;

— знание основных норм морали, готовность на их основе к сознательному самоограничению в поступках, поведении, расточительном потребительстве;

— сформированность ответственного отношения к учению;

— уважительное отношение к труду, наличие опыта участия в социально значимом труде;

— сформированность целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, учитывающего социальное, культурное, языковое, духовное многообразие современного мира;

— сформированность представлений об основных этапах становления математики как науки, современных тенденциях её развития и применения;

— осознанное, уважительное и доброжелательное отношение к другому человеку, его мнению, мировоззрению, культуре, языку, вере, гражданской позиции;

— готовность и способность вести диалог с другими людьми и достигать в нём взаимопонимания;

— идентификация себя как полноправного субъекта общения, в том числе готовность к конструированию образа партнёра по диалогу, готовность к конструированию образа допустимых способов диалога, процедур, готовность и способность к ведению переговоров;

— освоенность социальных норм, правил поведения, ролей и форм социальной жизни в группах и сообществах;

— освоение компетентностей в сфере организаторской деятельности;

— интериоризация[1] ценностей созидательного отношения к окружающей действительности, ценности продуктивной организации совместной деятельности, самореализации в группе и организации;

— формирование компетенций анализа, проектирования, организации деятельности, рефлексии изменений, способов взаимовыгодного сотрудничества, способов реализации собственного лидерского потенциала;

— сформированность ценности здорового и безопасного образа жизни;

— сформированность потребности самореализации в творческой и учебной деятельности, выражающаяся в креативности мышления, инициативности, активности при решении математических задач;

— умение контролировать процесс и прогнозировать результаты учебной математической деятельности;

---

[1] Под интериоризацией понимается формирование внутренней структуры психики человека посредством усвоения структур внешней социальной деятельности.

— умение применять полученные знания на практике;

— способность к эмоциональному и эстетическому восприятию различных математических объектов;

— сформированность навыков сотрудничества со взрослыми, сверстниками, детьми младшего возраста в образовательной, общественной, трудовой и других видах деятельности;

— сформированность уважительного отношения к учителю и одноклассникам;

— потребность в справедливом оценивании своей работы и работы одноклассников;

— умение соблюдать дисциплину на уроке;

— способность выбирать целевые и смысловые установки в своих действиях и поступках по отношению к учебной деятельности;

— потребность в приобретении новых знаний, умений, совершенствовании имеющихся;

— умение осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению.

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы:

— сформированность первоначальных представлений об основных идеях и методах математики как об универсальном языке науки и техники, средстве моделирования различных явлений и процессов окружающей жизни;

— умение распознавать в тексте или речи некорректные высказывания с точки зрения логики, отличать гипотезу от факта;

— умение применять различные способы рассуждений, в том числе основанные на индукции и дедукции, использовать различные методы решения задач;

— умение распознать математическую задачу в контексте проблемной ситуации в других дисциплинах и окружающей жизни;

— умение точно, логически последовательно излагать свои рассуждения в устной и письменной форме, понимать смысл поставленной задачи, корректно выстраивать аргументацию, проводить оппонирование;

— умение использовать различные источники для поиска информации, необходимой для решения проблемных задач; представлять информацию в различной форме;

— умение использовать для иллюстрации, интерпретации, аргументации своей позиции различные средства наглядности;

— умение формулировать гипотезы и понимать необходимость их подтверждения путём доказательств;

— понимание сути алгоритмов и алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с ними; умение самостоятельно создавать алгоритмы и алгоритмические предписания для решения учебных задач;

— умение создавать план решения задач исследовательского характера и осуществлять деятельность в соответствии с ним;

— умение оценивать результаты деятельности, соотносить их с поставленными целями и жизненным опытом, публично представлять результаты, в том числе с использованием мультимедиасредств.

Предметные результаты на ***базовом уровне*** проявляются в знаниях, умениях и сформированности учебных действий, характеризующих уровень овладения обучающимися содержанием учебного предмета:

— владеть базовым понятийным аппаратом;

— характеризовать системы целых, рациональных, действительных, иррациональных, комплексных чисел;

— давать определения, формулировать свойства корней n-степени, степеней, логарифмов, тригонометрических функций;

— производить тождественные преобразования, вычислять значения выражений;

— решать уравнения и неравенства с радикалами, степенями, логарифмами и тригонометрическими функциями в несложных случаях (с применением одной-двух формул и/или замены переменной), в том числе при решении практических задач из окружающего мира и из области смежных дисциплин;

— приводить примеры реальных явлений и процессов, в том числе периодических, которые описываются с помощью функций;

— определять значения функции по значению аргумента; изображать на координатной плоскости графики функций и зависимостей, заданных в различной форме (описание, таблица и формула); описывать свойства функций, используя график;

— соотносить зависимости из окружающей жизни и из смежных дисциплин с элементарными функциями;

— находить пределы последовательностей в простейших случаях;

— приводить примеры процессов и явлений, имеющих случайный или вероятностный характер; находить в простейших ситуациях вероятность наступления случайного события;

— осуществлять перевод информации на язык математических символов, представлять содержащиеся в задачах количественные данные в различном виде (формулы, графики, таблицы, диаграммы); выполнять обратные действий для извлечения информации из формул, таблиц, графиков, диаграмм;

— используя условия задачи, составлять числовые выражения, уравнения, неравенства и находить значения искомых величин;

— объяснять на примерах суть методов математического анализа для исследования функций и вычислений площадей фигур, ограниченных графиками функций;

— излагать и оформлять решение логически последовательно, с необходимыми пояснениями;

— использовать язык стереометрии для описания объектов окружающего мира;

— приводить примеры объектов окружающего мира, пространственные характеристики которых можно описывать с помощью геометрических терминов и отношений (параллельности, перпендикулярности, равенства, подобия, симметрии);

— иметь представления о многогранниках; распознавать на чертежах, рисунках и моделях пространственные геометрические фигуры, соотносить реальные трёхмерные объекты с их описанием, чертежами, изображениями; исследовать и описывать пространственные объекты;

— давать определения, формулировать свойства многогранников;

— выполнять геометрические построения пространственных фигур;

— иллюстрировать на примерах методы параллельного и перпендикулярного проектирования;

— строить сечения (в простейших случаях) пространственных геометрических фигур;

— уметь использовать свойства фигур на плоскости и в пространстве, методы вычисления их линейных элементов и углов;

— проводить письменные и устные логические обоснования при решении задач на построение, вычисления и доказательство;

— использовать в отношении геометрических фигур готовые компьютерные программы для построения, проведения экспериментов и наблюдений на плоскости и в пространстве, а также позволяющие проводить эксперименты и наблюдения динамически (в движении).

На ***углублённом уровне*** к перечисленным выше предметным результатам добавляются следующие:

— *доказывать свойства логарифмов, корней n-степени, тригонометрических функций (в том числе обратных тригонометрических функций);*

— *формулировать и доказывать теорему о рациональных корнях многочлена;*

— *решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, содержащих степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции без ограничения по уровню сложности тождественных преобразований;*

— *строить и исследовать математические модели реальных зависимостей из окружающей жизни и смежных дисциплин;*

— *использовать метод координат на плоскости для представления алгебраических объектов;*

— *характеризовать поведение функций и зависимостей;*

— *применять идею предельного перехода к определению величины бесконечной периодической дроби, вычислению длины окружности, площади круга;*

— *характеризовать процессы и явления, имеющие вероятностный характер; оценивать вероятностные характеристики случайных величин по статистическим данным;*

— *приводить примеры математических задач, для решения которых можно применять геометрический способ задания вероятности; решать простейшие прикладные задачи на геометрические вероятности;*

— *обосновывать методы параллельного, перпендикулярного и центрального проектирования;*

— *доказывать свойства многогранников и тел вращения, анализировать формулировки определений и теорем;*

— *применять различные методы решения задач на вычисления и доказательство;*

— *использовать алгебраический, тригонометрический аппарат и идеи движения при решении геометрических задач на плоскости и в пространстве;*

— применять координатный и векторный методы для решения задач на вычисления и доказательства;

— использовать отношения равновеликости при вычислении объёмов многогранников и тел вращения;

— решать сложные задачи на построение, доказательство и вычисление с анализом условия задачи, определением хода решения задачи, выстраиванием логической цепочки рассуждений, соотнесением полученного ответа с условием задачи.

2. Содержание учебного курса

Первый уровень — 140 учебных часов.
Второй уровень — не менее 210 учебных часов (отмечен *).
Третий уровень — не менее 280 учебных часов (отмечен **).
Повторение курса математики 10 класса (10 ч, *15 ч,** 15 ч).

Предел и непрерывность (10 часов, *15 часов, **24 часа). Область определения функции. Пример области определения сложной структуры. Предельные точки области определения. Предел функции. Графическая иллюстрация понятия предела функции. Свойства пределов функций. **Доказательство теоремы для предела отношения двух функций*. Пример разрыва функции. Непрерывность функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций. ***Доказательство теоремы о непрерывности сложной функции*. Непрерывность элементарных функций. Доказательство неравенства $\sin x < \operatorname{tg} x$. **Предел* $\dfrac{\sin x}{x}$ *при* $x \to 0$. ***Теорема о множестве значений непрерывной функции*.

Сфера и шар (10 часов, *15 часов, **22 часа). Сфера и шар. Касание сферы и плоскости. **Общие точки шара и плоскости*. Описанные сферы. Сферы, описанные около многогранника, пирамиды. **Нахождение центра описанной сферы*. ***Нахождение центра описанной сферы через серединные перпендикуляры*. Сфера, вписанная в многогранник, пирамиду. **Центр сферы, касающейся граней двугранного угла*. ***Центр сферы, касающейся сторон плоского угла*. ***Пример задачи на касание сферы с заданными прямыми*. ***Равенство отрезков касательных, проведённых к сфере из одной точки*.

Производная (10 часов, *12 часов, **16 часов). Касательная к графику функции. Средняя скорость и мгновенная скорость. Производная функция в точке. **Пример функции, не имеющей производной в некоторой точке*. Производные элементарных функций. Производные суммы функций и произведения функции на число. ***Непрерывность в точке при существовании производной*. Производные произведения и частного двух функций. Формула производной сложной функции. ***Частный случай формулы производной сложной функции*.

Координаты и векторы в пространстве (12 часов, *18 часов, **22 часа). Координаты в пространстве. Оси координат в пространстве. Расстояние между точками в пространстве. ***Доказательство формулы расстояния*. Координаты середины заданного отрезка. Векторы в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Координаты точки и вектора. Равенство векторов и его свойство. Координаты вектора. Умножение вектора на число. ***Доказательство геометрических свойств умножения вектора на число*. Свойства умножения вектора на число. Коллинеарные векторы. Сонаправленные векторы. Параметрическое задание прямой. Компланарные векторы. Единственность разложения вектора по трём некомпланарным векторам. ***Свободные векторы. **Длина и направление свободного вектора. **Сумма и разность свободных векторов. **Разложение свободного вектора по трём некомпланарным векторам. **Трёхмерность пространства*.

Исследование функций (12 часов, *18 часов, **24 часа). Приближение значения функции. Теорема Лагранжа. Графики функций и их построение. Область определения и непрерывность. Промежутки знакопостоянства и нули функции. ***Пределы функции справа и слева*. Промежутки монотонности. Локальные минимумы и максимумы функции, точки экстремума. ***Промежутки выпуклости и вогнутости*. Этапы построения графика функции. Элементарный пример на построение графика. **Пример на построение графика, имеющего асимптоты. **Пример на построение графика функции с двумя разными наклонными асимптотами*. Задачи на наибольшие и наименьшие значения. Максимум и минимум функции на множестве. **Теорема Ферма. **Практическая задача на нахождение максимума функции. *Новые признаки локального максимума и локального минимума*.

Метод координат в пространстве (10 часов, *18 часов, **20 часов). Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора. Угол между векторами. Перпендикулярность векторов. **Применение векторов к решению геометрических задач*. Нормаль к плоскости. **Существование нормали*. Задание плоскости с помощью уравнения. **Векторный признак параллельности прямой и плоскости*. Косинус угла между векторами. Угол между скрещивающимися прямыми. Угол между плоскостями. Векторный признак перпендикулярности плоскостей. ***Векторный признак параллельности плоскостей*. Синус угла между прямой и плоскостью. Формула расстояния от точки до плоскости. ***Расстояние между скрещивающимися прямыми*. Уравнение сферы. **Составление уравнения сферы*. ***Касание сферы с плоскостью*.

Уравнения с неизвестной функцией и её производными (6 часов, *11 часов, *14 часов). Понятие первообразной. Условие постоянства функции. Таблица первообразных. **Неопределённый интеграл*. Правила нахождения первообразных. ***Правило замены переменной для неопределённых интегралов*. Пример на составление дифференциального уравнения. ***Задача о полёте парашютиста*. ***Первая и вторая космические скорости*.

Общие представления о площади и объёме (6 часов, *12 часов, **14 часов). Свойства площади. Палетки. Элементарные фигуры и их площадь. Аддитивность и монотонность площади для элементарных фигур. **Критерии измеримости*. **Доказательство критериев измеримости*. Равенство площадей равных фигур. ***Измеримость объединения фигур*. Существование площади круга. Свойства объёма. Элементарные фигуры в пространстве. **Измеримость по Жордану на **плоскости в пространстве*. Объём прямоугольного параллелепипеда. Объём обобщённого цилиндра.

Определённый интеграл (8 часов, *10 часов, **14 часов). Криволинейная трапеция. Метод исчерпывания. Интегральные суммы. Формула Ньютона — Лейбница. ***Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций*. Свойства определённого интеграла. ***Нахождение первообразных с помощью площадей*. Формула для вычисления объёма тел. ***Вычисление объёма призмы*. ***Условие непрерывности сечений*. ***Доказательство формулы для вычисления объёма*. Объём пирамиды. **Тело вращения*. Объём конуса. Объём шара. **Принцип Кавальери*.

Условные вероятности (8 часов, *11 часов, **14 часов). Условная вероятность. Способы вычисления условной вероятности. Формула условной вероятности. Формула произведения вероятностей. Формулы вероятности произведения двух событий. **Формула вероятности произведения нескольких событий. **Доказательство формулы произведения вероятностей. *Вероятность произведения двух независимых событий. *Вероятность произведения нескольких независимых событий.* Полный класс событий. Свойства полного класса событий. Применение полного класса событий к вычислению вероятностей. Формула полной вероятности. ***Формула Байеса вероятности гипотез.*

Комплексные числа (8 часов, *10 часов, **16 часов). Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. ***Правило нахождения аргумента комплексного числа.* Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме записи. Формула Муавра. **Представление тригонометрических функций с помощью комплексных чисел.* Деление комплексных чисел. Корни из комплексного числа. ***Формула корней из комплексного числа. **Комплексные корни из 1. ** Свойства корней из 1. **Пример на применение комплексных корней из 1.*

Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве (8 часов, *11 часов, **18 часов). Внутренние, внешние и граничные точки шара. Внутренность шара. Определение внешних, внутренних и граничных точек. Внутренность и граница множества. ***Пример множества, для которого любая точка пространства является граничной.* Внутренние, внешние и граничные точки на плоскости. ***Внутренние, внешние и граничные точки множеств на прямой. **Тела в пространстве. **Поверхность тела. **Замкнутые области на плоскости. **Выпуклые фигуры в пространстве. **Выпуклые тела. **Признак выпуклости тела. **Задание полупространства с помощью координат. **Многоугольные области. **Многогранники. **Примеры многогранников.*

Периодические функции (6 часов, *9 часов, **16 часов). Всюду определённые периодические функции. Основной период. Основной период функции $y = \operatorname{tg} x$. Графики периодических функций. Особенности графика периодической функции. Примеры графиков периодических функций. Функции с основным периодом. ***Изменение периодов при линейной* *замене аргумента. **Тригонометрический двучлен. **Существование основного периода у периодического тригонометрического двучлена общего вида.*

Применение комплексных чисел (6 часов, *10 часов, **16 часов). Функции комплексного переменного. Параллельный перенос и повороты в комплексной плоскости. Геометрический смысл линейных функций в комплексной плоскости. ***Скользящая симметрия.* Уравнения прямой и окружности в комплексной плоскости. Инверсия и её свойства. **Формула Эйлера для мнимых показателей. **Показательная форма записи комплексного числа. **Синус и косинус при комплексном значении аргумента. **Показательная функция в комплексной плоскости.*

Повторение курса математики 5—11 классов (10 часов, *15 часов, **15 часов).

3. Календарно-тематическое и поурочное планирование

Календарно-тематическое и поурочное планирование подробно представлено в УМК «Математика» для 11 класса образовательных организаций под редакцией академика РАН В.В. Козлова и академика РАО А.А. Никитина в двух пособиях:

- Рабочая программа «Математика». 11 класс. Базовый уровень.
- Рабочая программа «Математика». 11 класс. Углублённый уровень.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЮ УРОКОВ

Предисловие

Методическое пособие к учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» для 11 класса общеобразовательных организаций[1] учебно-методического комплекса из серии «Инновационная школа. Математика» в составе трёхуровневых учебников, рабочих тетрадей, программно-методических и дидактических материалов с 5 по 11 класс рассчитано на то, чтобы облегчить работу преподавателей, уменьшить затраты времени и усилий на восприятие замысла и содержания многоуровневого учебника.

Изучать математику целесообразно в единстве её идей и методов. Единое изложение материала подчёркивает широту математических идей и общность развиваемых методов, тесную связь с другими науками, а также красоту математики как важного элемента общей человеческой культуры.

Моделирование окружающих нас явлений и изучение возникающих моделей позволяют предсказывать результаты, которые не всегда можно проверить экспериментально. В этом состоит одна из главных задач математики, а поэтому систематическое рассмотрение практических задач играет важную роль в процессе обучения.

Развитие интереса к математике является одним из залогов её качественного усвоения. Использование увлекательных задач позволяет подчеркнуть красоту математики и помогает сделать преподавание математики живым и менее формальным.

Математика носит абстрактный характер, имеет свои законы развития и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Умение абстрактно мыслить вырабатывается постепенно, опираясь на конкретные реальные объекты. Кроме того, изучение и осознанное восприятие многих математических понятий, свойств и методов требует постепенного перехода от наблюдений и экспериментов к точным форму-

[1] Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 11 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. акад. РАН В.В. Козлова, акад. РАО А.А. Никитина. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2017.

лировкам и доказательствам, неоднократного возвращения к фундаментальным понятиям.

Авторским коллективом из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одарённости детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета создан учебно-методический комплекс, в котором предложены три уровня обучения математике.

Важной особенностью современного этапа в образовании является поиск оптимальных стандартов в изучении школьных предметов, которые отражают потребности общества в различных сферах человеческой деятельности и учитывают психологические особенности обучающихся. Такая тенденция в области естественно-научных дисциплин проявилась давно, в частности, это можно видеть по широкому распространению специализированных классов и школ физико-математического профиля. Однако не везде имеются возможности для организации специализированного обучения, но в каждой школе встречаются обучающиеся с разными способностями к изучению отдельных предметов. Поэтому целесообразно иметь учебники, включающие в себя различные уровни изложения материала.

Потребности использования математики в разных областях человеческой деятельности различны. Природные различия в склонностях и способностях, типах мышления, требования профессиональной ориентации приводят к тому, что не всем обучающимся математика нужна в одинаковой степени и в одинаковом объёме. Многоуровневое обучение математике, начиная с 5 класса, способно обеспечить минимальные запросы общества к уровню математической подготовки и предоставить всем учащимся широкие возможности для развития своих способностей и получения дополнительных математических знаний. При этом учителя получают возможность строить преподавание с учётом специфики учебных заведений, интересов и уровня подготовки учащихся и при наличии возможности осуществлять углублённое изучение математики. **Первый уровень** предполагает овладение таким минимумом знаний и умений, которые необходимы каждому культурному человеку. **Второй уровень** развивает и дополняет первый уровень, тесно с ним связан и содержит часть материала для углублённого изучения математики. Он позволяет обеспечить умения и навыки, необходимые для успешного продолжения обучения в вузе. **Третий уровень** — специализированный — рассчитан на воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений. Профильное обучение, наряду со специализированной подготовкой, осуществляемое в старших классах и реализуемое в рамках различных организационных и дидактических форм изучения предмета, рассчитано на то, чтобы учащиеся по окончании школы приобретали компетенции, необходимые для последующего обучения в вузах с высокими требованиями к математическим дисциплинам.

В рамках представленной концепции трёхуровневый учебник по математике для 11 класса рассчитан на формирование единого цельного восприятия математики с учётом возможной специализации в области математики и естественно-научных дисциплин: физики, химии и биологии. Изложение материала ведётся в нескольких направлениях.

Первое направление продолжает изучение свойств действительных и комплексных чисел и пределов, рассматриваются пределы функций и непрерывность.

Продолжает своё развитие и второе направление, относящееся к основам математического анализа. Достаточно подробно изучается вопрос исследования функций с помощью производных, рассматривается понятие дифференциального уравнения, интегрирование и его приложения.

Третье направление продолжает изучение элементарных функций с алгебраической точки зрения. В частности, достаточно полно и подробно изучается периодичность тригонометрических двучленов и рассматриваются примеры функций комплексного переменного.

Четвёртое направление относится к технике преобразования выражений, к решению уравнений, неравенств и задач с параметрами.

Пятое направление связано с систематическим изучением стереометрии. На основе материала, изученного в предыдущих классах, рассматриваются задачи со сферами и задачи на комбинации тел.

Шестое направление относится к общим свойствам геометрических фигур. Изучаются начальные понятия общей топологии, что позволяет обратить внимание на характерные особенности тех геометрических фигур на плоскости и в пространстве, которые рассматриваются в школьном курсе математики.

Седьмое направление состоит в изучении элементов теории вероятностей, что позволяет обратить внимание на ещё одно практическое применение математических методов.

Изучение теоретического материала предполагает решение задач и упражнений, ответы на тесты как из учебника, так и из рабочей тетради.

В целом структура учебника по математике для 11 класса достаточно традиционна: учебник разбит на главы, главы — на параграфы, параграфы — на пункты, в конце каждого параграфа формулируются контрольные вопросы и приводятся задачи, упражнения и тесты. В пособии материал учебника рассматривается, следуя структуре учебника, по определённой схеме. Необходимо подчеркнуть, что предлагаемая схема разбора материала учебника не имеет обязательного характера и осуществляется только для того, чтобы уменьшить усилия на восприятие замысла и содержания, облегчить работу преподавателя в тех случаях, когда возникают затруднения, сомнения, нехватка времени и т.п.

Сначала определяются **цели**, которые должны достигаться в процессе изучения данной главы, данного параграфа. Затем уточняются **особенности** изложения учебного материала данной главы, данного параграфа, особенности распределения учебного материала по уровням обучения. При этом указываются **предварительные знания, умения** и **навыки**, предполагаемые у учащихся. Перечисляются **новые математические понятия** и **свойства**, изучение которых производится в данном параграфе или данной главе и которые могут быть определены и обоснованы с различной степенью строгости. Указываются также **вспомогательные понятия**. Это преимущественно понятия из жизненной практики или других учебных дисциплин. Вспомогательными на текущем этапе обучения могут оказаться термины, которые только упоминаются в тексте, в полном объёме будут изучаться в дальнейшем, но аккуратное определение которых давать преждевременно. Многократное возвращение к важнейшим понятиям способствует их лучшему восприятию, расширению кругозора, привитию ощущения «широты мира», осознанию того, что понятия могут вмещать в себя значительно больше, чем изучено на данном этапе.

К особенностям изложения материала следует отнести распределение пунктов по уровням изучения и наличие в конце каждого пункта так называемого «открытого» вопроса, который предназначен для того, чтобы учащиеся осмыслили прочитанное и смогли найти ответ на поставленный вопрос либо из самого текста пункта, либо на основе ранее изученного материала. Иногда для ответа учащимся нужно попытаться самим дать определения понятий, обобщить некоторые рассуждения и т.п. Чаще всего предполагается, что смысл открытого вопроса является естественным продолжением основной идеи пункта. Тем самым ответ на открытый вопрос можно считать промежуточным итогом по изучению соответствующего пункта. Открытые вопросы не являются контрольными и не всегда подразумевают наличие точных или конкретных ответов. Открытый вопрос позволяет читателю остановиться и задуматься над только что прочитанным материалом. Иногда ответ на вопрос приводит материал пункта к определённому логическому завершению. Именно поэтому учащемуся необходимо найти ответы на открытые вопросы либо самостоятельно, либо с посторонней помощью. Разумеется, учащиеся могут дать иногда неверные или неудовлетворительные с математической точки зрения ответы на эти вопросы. В таком случае имеет смысл сравнить приведённый ответ с правильным ответом, математическим определением и т.д. и выяснить, из каких соображений проистекает правильный ответ. Тем самым делается попытка подвести обучающихся к пониманию естественности математических определений, приёмов рассуждений.

В пособии приводятся варианты ответов на **открытые вопросы к пунктам**. Во многих случаях это только варианты ответов, так как со стороны учащихся можно ожидать разнообразных, а иногда и неожиданных правильных ответов.

Учебник 11 класса и рабочие тетради к нему содержат значительное количество непростых задач, преимущественно рассчитанных на третий уровень. В пособии приводятся **указания к решению** большинства **наиболее трудных** или нестандартных **задач**.

В пособии также приведены **указания по работе с наиболее трудными тестами**. В учебнике и рабочих тетрадях к нему содержатся образцы двух видов тестовых заданий. Задания первого вида достаточно традиционны — это одновариантные тесты, рассчитанные на выбор одного верного варианта из числа приведённых вариантов. Задания второго вида — многовариантные тесты, рассчитанные на выбор нескольких правильных ответов из приведённых. Работа над многовариантными тестами чаще всего предполагает анализ предлагаемых заданий и поиск закономерностей, с учётом которых можно получить правильный ответ, состоящий в выборе всех верных вариантов. Среди многовариантных тестов можно найти значительное число задач, в основном рассчитанных на второй и третий уровни. В конце пособия приводятся **ответы ко всем тестам** из учебника.

В целях привлечения учащихся к исследовательской деятельности в учебник 11 класса включены особые задачи, которые можно охарактеризовать как **мини-исследования**. Это, как правило, задачи, которые в значительной степени связаны с текущим изучаемым материалом по тематике, но требующие для своего решения рассмотрения различных возможностей и вариантов, поиска нескольких этапов логических рассуждений, основанных не только на текущем, но и на ранее изученном материале. Поэтому работа учащегося над мини-исследованием превращается в цельный процесс поиска решения поставленной задачи, в некоторой степени приближенный к реальной научной работе. Основной целью мини-исследований является выработка навыков самостоятельного получения новых, иногда заранее неизвестных результатов. В связи с этим можно выделить несколько направлений, по которым формируются задачи для мини-исследований: повторное решение с изменением параметров и начальных условий задачи (действия по аналогии); проведение рассуждений в изменённой ситуации по схеме, аналогичной рассмотренной; самостоятельное получение некоторых теоретических результатов на основе предлагаемой схемы; построение схемы доказательств по аналогии с известными схемами (самостоятельный выбор одной из схем); обобщение задачи (исследование класса задач); выявление задач с интересными и неожиданными результатами (в частности, установление границ применимости теоретических результатов, построение контрпримеров и т.д.); эквивалентная замена задачи в виде серии более узких задач (перебор случаев); эквивалентная замена задачи в форме частного случая более широкой задачи (специализация задачи).

В конце пособия приведены **образцы вариантов самостоятельных** и **контрольных работ**.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневского и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе работы в формировании содержания трёхуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с ними, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленяка и профессора Д.М. Смирнова.

Глава 1
ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Цель главы — изучить понятия предела функции и непрерывности, установить непрерывность основных элементарных функций и показать, как применять свойства монотонности и непрерывности при решении некоторых уравнений и неравенств.

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Цель параграфа — определить понятие предела функции $f(x)$ в предельной точке a на языке последовательностей и на языке «$\varepsilon-\delta$», а также рассмотреть основные свойства пределов функций.

Особенности параграфа. Прежде чем давать определение предела функции, рекомендуется рассмотреть конкретные примеры областей определения функции, напомнить определение ε-окрестности точки a и виды её записей. Затем следует проанализировать понятие предельной точки области определения функции и повторить определение предела числовой последовательности. После этого следует сформулировать определение предела функции $f(x)$ в предельной точке a области определения D этой функции на языке последовательностей и привести соответствующие примеры. Далее рекомендуется рассмотреть определение предела функции в предельной точке области определения на языке «$\varepsilon-\delta$» вместе с графической иллюстрацией этого понятия. Особое внимание необходимо уделить факту эквивалентности этих определений, а на втором-третьем уровнях можно предложить обучающимся самостоятельно доказать эту эквивалентность. В заключение следует изучить с учащимися основные теоремы о пределах функций, причём большинство из приведённых в учебнике свойств даны без доказательств. При более глубоком изучении понятия предела функции следует особое внимание уделить задачам 9, 14–17.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: функция; область определения функции; ε-окрестность числа, предел числовой последовательности и его основные свойства.

Новые математические понятия: предельная точка числового множества; предел функции в предельной точке на языке последовательностей; предел функции в предельной точке на языке «ε−δ».

Вспомогательные понятия: геометрическая иллюстрация понятия предела функции в точке.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какова естественная область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$?

Ответ. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $\dfrac{x}{1-x} \geq 0$. Случай, когда $x \leq 0$ и $1 - x < 0$, невозможен. Поэтому $x \geq 0$ и $1 - x > 0$, откуда $0 \leq x < 1$. Итак, естественная область определения функции $f(x)$ есть промежуток $[0; 1)$.

1.2.** Какова область определения функции $f(x)=\sqrt{\lg(\sin x)}$?

Ответ. По условию $\lg \sin x \geq 0$, откуда $\sin x \geq 1$. Поэтому область определения функции $f(x) = \sqrt{\lg(\sin x)}$ состоит из таких точек x, для которых $\sin x = 1$, то есть из точек $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

1.3. Почему в любой ε-окрестности числа 0 всегда найдётся такое значение a, что $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{a}}=1$?

Ответ. Если $a = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}(4k+1)}$, где $k \in Z$, то $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{a}} = 1$. Неравенство $\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}(4k+1)} < \varepsilon$ выполняется при условии $4k+1 > \dfrac{2}{\pi\varepsilon}$ и заведомо имеет место, если $4k > \dfrac{2}{\pi\varepsilon} \Leftrightarrow k > \dfrac{1}{2\pi\varepsilon}$.

1.4. Как показать, что каждая δ-окрестность числа 1 имеет общие точки с областью определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$?

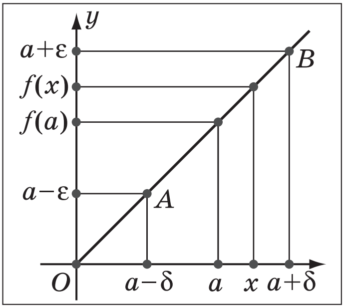
Ответ. С помощью метода интервалов можно найти, что $x \in (-\infty; 0] \cup (1; \infty)$. Поэтому область определения данной функции есть множество $D = (-\infty; 1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$ и каждая δ-окрестность $(1-\delta;\ 1+\delta)$ содержит интервал $(1;\ 1+\delta)$, состоящий из точек множества D.

1.5. Как доказать, что $\lim\limits_{x \to -2} x^3 = -8$?

Ответ. Пусть (x_n) — произвольная последовательность чисел $x_n \neq -2$, сходящаяся к числу -2. Положим, $y_n = x_n^3$. Тогда по теореме о пределе произведения сходящихся последовательностей $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^3 = (\lim\limits_{n \to \infty} x_n)^3 = (-2)^3 = -8$.

1.6. Как, используя определение 2, доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$?

Ответ. Возьмём произвольное положительное число ε, и пусть $\delta = \varepsilon$. Тогда если $|x - 0| = |x| < \delta$, то $||x| - 0| = |x| < \varepsilon$. По определению 2 получаем, что $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$.



1.7. Как с помощью графика проиллюстрировать, что $\lim\limits_{x \to a} x = a$?

Ответ. Пусть $f(x) = x$. Графиком функции является биссектриса первого и третьего координатных углов. При $a > 0$ для произвольного положительного числа ε выберем $\delta = \varepsilon$ (см. рис.). Если $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$, то точка x лежит в интервале $(a-\delta;\ a+\delta) = (a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, а соответствующая точка $(x; f(x))$ графика функции $f(x) = x$ лежит между точками A и B на биссектрисе. А это означает, что $a-\varepsilon < f(x) < a+\varepsilon$. Следовательно, $|f(x) - a| < \varepsilon$, и поэтому $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$.

1.8. Чему равен $\lim\limits_{x \to 3} 3x^2$?

Ответ. По теореме об арифметических свойствах пределов функций $\lim\limits_{x \to 3} 3x^2 = 3 \cdot \lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3 \cdot (\lim\limits_{x \to 3} x)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$.

1.9. Как доказать утверждение 2, теоремы 1?

Ответ. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$. Пусть $f(x)$ определена на множестве F и $g(x)$ на множестве G, при этом a — предельная точка множества $D = F \cap G$. Возьмём произвольную последовательность (x_n)

точек из области D, такую, что $x_n \neq a$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и этот предел равен a. По условию существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$, равные соответственно A и B. Тогда по известной из учебника 10 класса теореме о пределе произведения сходящихся последовательностей последовательность $(f(x_n) \cdot g(x_n))$ имеет предел, равный $A \cdot B$. По определению 1 предела функции имеем: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot q(x)) = A \cdot B$.

1.10. Как показать, что $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \cos x) = 0$?

Ответ. По теореме о пределе промежуточной функции и вследствие того, что $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ (вопрос к пункту 1.6), из неравенств $-|x| \leq |x \cdot \cos x| \leq |x|$ получим $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \cos x) = 0$.

1.11. Как показать, что если функция принимает неотрицательные значения и в некоторой точке имеет предел, то значение предела также неотрицательно?

Ответ. Взяв в формулировке теоремы 3 функцию $f(x)$, тождественно равную нулю, получим такое утверждение: если для функции $g(x)$ при всех значениях x из некоторой δ-окрестности точки x, отличных от a, выполняется неравенство $g(x) \geq 0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $B \geq 0$.

Можно ответить на вопрос, воспользовавшись определением предела функции на языке «$\varepsilon - \delta$». Предположим, что для неотрицательной функции $g(x)$ её предел $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ отрицателен. Взяв положительное число ε, равное, например, $\frac{-B}{2}$, получим, что найдётся такое число δ, что для всех точек x из δ-окрестности числа a выполняются неравенства $B - \frac{-B}{2} < g(x) < B + \frac{-B}{2}$, $\frac{3B}{2} < g(x) < \frac{B}{2}$. Поскольку в левой и правой части последнего неравенства стоят отрицательные числа, то функция $g(x)$ вопреки условию принимает отрицательные значения. Следовательно, предположение было неверным и предел $B \geq 0$.

1.12. Чему равен $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$?

Ответ. При $x \neq 0$ имеем $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$. Поэтому по теореме 1 об арифметических свойствах пределов функций искомый предел равен $\frac{0+1}{0-1}=-1$.

Указания к решению наиболее трудных задач

1. е)* Вычислите предел последовательности с общим членом: $a_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Указание. Домножив числитель дроби на $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})$, знаменатель дроби на $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, получим, что

$$a_n=\frac{((n+2)-(n+1))(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{((n+1)-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}=1$, по теореме об арифметических свойствах пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1+1}{1+1}=1$.

2. Докажите, что предел последовательности (a_n) равен нулю, если:

а) $a_n=n^{-\frac{1}{3}}$; б) $a_n=2^{-n}$; в)* $a_n=\frac{\sin n}{n+1}$; г)** $a_n=\frac{2n-3}{3^n}$.

Указание. а) Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и выберем целое число $N>\varepsilon^{-3}$. Если теперь $n>N$, то $0<a_n=n^{-\frac{1}{3}}<N^{-\frac{1}{3}}<\varepsilon$, то есть a_n принадлежит промежутку $(0;\varepsilon)$.

б) По формуле бинома Ньютона $2^n=(1+1)^n=1+n+\ldots$, где точками обозначены положительные слагаемые. Следовательно, $2^n>n$ и $0<a_n=2^{-n}<\frac{1}{n}$. Теперь нужный результат вытекает из теоремы 2 и того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

в)* Воспользуйтесь теоремой о пределе промежуточной последовательности и неравенством $-\frac{1}{n+1}\le\frac{\sin n}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$.

г)** Воспользуйтесь теоремой о пределе промежуточной последовательности и неравенствами

$$0<\frac{2n-3}{3^n}\le\frac{2\cdot 2^{n-1}-3}{3^n}<\frac{2\cdot 2^{n-1}}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Можно решать и по-другому. По формуле бинома

$$(1+2)^n = 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^2 + \ldots > 2n(n-1).$$

Отсюда при $n \geq 2$ имеем неравенства $0 < \frac{2n-3}{3^n} < \frac{2n}{3^n} < \frac{1}{n-1}$.

13.* Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^7+2^7}{x^9+2^9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^{33}+1}{x^{100}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

Указание. а) Сократив дробь $\frac{x^5-1}{x^3-1}$ на $(x-1)$, получим дробь $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$, значения которой при $x \to 1$ имеют предел, равный $\frac{5}{3}$.

б) Так как $x^7 + 2^7 = (x+2)(x^6 - 2x^5 + 2^2x^4 - \ldots + 2^6)$ и $x^9 + 2^9 = (x+2)(x^8 - 2x^7 + 2^2x^6 - \ldots + 2^8)$, то, сократив дробь $\frac{x^7+2^7}{x^9+2^9}$ на $(x+2)$, получим дробь, которая при $x \to -2$ имеет предел, равный её же значению при $x = -2$, то есть $\frac{7\cdot 2^6}{9\cdot 2^8} = \frac{7}{36}$.

в) Сократив дробь $\frac{x^{33}+1}{x^{100}-1}$ на $(x+1)$, получим дробь $\frac{x^{32}-x^{33}+x^{30}-\ldots+x^2-x+1}{x^{99}-x^{98}+x^{97}-\ldots-x^2+x-1}$, значения которой при $x \to -1$ имеют предел, равный значению при $x = -1$, то есть $\left(-\frac{33}{100}\right)$.

г) Решение упрощается, если сначала доказать общий результат, что $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{m+1}{x^{m+1}-1} - \frac{m}{x^m-1}\right) = -\frac{1}{2}$ при любом натуральном n. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{4}{x^4-1}\right) + \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{4}{x^4-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

д) Складывая дроби, получим $\left(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right) = \frac{2-x}{x(x-1)(x-2)}$. Сократив на $(x-2)$, находим дробь $\frac{1}{x(x-1)}$, которая при $x \to 2$ имеет предел, равный её значению при $x = 2$, то есть $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.2. Какие из пределов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существуют и равны 0?

1) $a_n = (0{,}01)^n$ 2) $a_n = \sqrt[n]{0{,}01}$ 3) $a_n = \frac{0{,}01n}{n+1}$ 4) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{0{,}01n+1}$

Указание. В варианте 1 приведён частный случай последовательности $b_n = q^n$ при $0 < |q| < 1$, предел которой равен 0. В варианте 2 приведён частный случай последовательности $b_n = \sqrt[n]{p}$ при $0 < p < 1$, предел которой равен 1. В остальных вариантах предел находится, если числитель и знаменатель дробей разделить на n.

2.4. Какие из пределов существуют и не равны нулю?

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$

Указание. В каждом из вариантов разность выражений одновременно умножить и разделить на соответствующую сумму.

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Цель параграфа — определить общее понятие непрерывности функции и изучить основные теоремы о непрерывных функциях.

Особенности параграфа. Определение непрерывности сформулировано в двух эквивалентных формах — на языке последовательностей и на языке «$\varepsilon - \delta$». Наряду с определением непрерывности функции в точке из области определения сформулировано также определение непрерывности на множестве, входящем в область определения рассматриваемой функции. При изучении данного параграфа особое внимание следует обратить на теорему о непрерывности сложной функции, так как на основе этой теоремы можно устанавливать непрерывность для широкого класса функций. Все пункты, кроме последнего 2.8.**, предлагаются для изучения на первом уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: предельная точка числового множества; предел функции в предельной точке и его основные свойства.

Новые математические понятия: непрерывность функции в точке; непрерывность функции на множестве; изолированная точка.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Чем различаются функции $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ и $h(x)=\operatorname{sgn}x$?

Ответ. При всех $x \neq 0$ имеет место равенство $f(x) = h(x)$. Однако при $x = 0$ функция $h(x)$ определена, а функция $f(x)$ не определена.

2.2. Как показать, что функция $f(x) = x + 5$ непрерывна в каждой точке числовой оси?

Ответ. Для всякой точки a числовой оси справедливо равенство $|f(x)-f(a)|=|x-a|$. Поэтому определение непрерывности будет выполнено, если взять $\delta=\varepsilon$.

2.3. Как доказать, что функция $f(x)=x^2$ непрерывна на своей естественной области определения?

Ответ. Функция $f(x)$ определена для всех x. Возьмём произвольное число a и произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $|x-a|<\delta$, где положительное число δ будет определено позже. При перечисленных условиях $|f(x) - f(a)| = |(x - a)(x + a)| < \delta(2|a| + \delta)$. Выберем δ так, чтобы $2\delta|a| + \delta^2 < \varepsilon$. Для этого подойдёт любое δ из интервала $0<\delta<-|a|+\sqrt{a^2+\varepsilon}$. При таком δ выполняется определение непрерывности в точке a.

2.4. Как доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на своей естественной области определения?

Ответ. Функция $f(x)$ определена для всех $x \neq 0$. В пункте заданная функция непрерывна на промежутке $(0; \infty)$. Аналогично рассмотрим произвольное число $a \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) =$ $=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}=\frac{1}{a}=f(a)$.

2.5. Как доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sgn}x$ не является непрерывной в точке 0?

Ответ. Рассмотрим последовательность $x_n=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Понятно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n}\right)=1\neq f(0)$.

2.6. Как доказать непрерывность функции $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ в своей области определения?

Ответ. Функции $h(x) = x^3$ и $g(x) = x^2 - 1$ определены и непрерывны на всей числовой прямой. Поэтому если $g(x) \neq 0$, то по теореме 6 функция $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x.

2.7. Как доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ непрерывна в своей области определения?

Ответ. Функция $g(x) = x^2 - 1$ определена и непрерывна на всей числовой прямой. Поэтому если $g(x) \neq 0$, то по теореме 6 функция $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ непрерывна в точке x области определения.

2.8.** Может ли функция $h(x) = f(g(x))$ быть непрерывной в точке a, если функция $g(x)$ непрерывна в точке a, но при этом функция $f(z)$ не является непрерывной в точке $b = g(a)$?

Ответ. Может. Например, пусть $f(z) = \operatorname{sgn} z$, $g(x) \equiv 0$. Функция $g(x)$ непрерывна в каждой точке, а функция $f(z)$ имеет разрыв при $z = 0 = g(0)$. Тем не менее композиция $h(x) = f(g(x)) \equiv 0$ непрерывна в каждой точке.

Указания к решению наиболее трудных задач

2.** Пусть $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Докажите, что $f(x)$ непрерывна в нуле.

Указание. Так как $0 \leq |f(x)| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$ при всех $x \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = 0$, откуда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3.** Пусть $f(x) = 0$, если x иррационально и $f(x) = \dfrac{1}{q}$, если $x = \dfrac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа и $q > 0$. Докажите, что $f(x)$ непрерывна в нуле.

Указание. Заметим, что при всех x выполнено неравенство $|f(x)| \leq |x|$. Для иррациональных x это неравенство очевидно. Если же $x = \dfrac{p}{q}$, где p и q взаимно простые целые числа и $q > 0$, то $|f(x)| = \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{|p|}{q} = \left|\dfrac{p}{q}\right| = |x|$. Значит, $0 \leq \lim\limits_{x\to 0}|f(x)| \leq \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

9.** Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально}, \end{cases}$ $g(x) = [x]$ — целая часть x, $h(x) = \{x\}$ — дробная часть x. Найдите, по какому правилу действуют функции:

а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$; в) $f(h(x))$; г) $h(f(x))$;

д) $f(g(h(x)))$; е) $h(g(f(x)))$; ё) $g(h(f(x)))$.

Указание. Для любого x значение $g(x) = [x]$ — целое, и поэтому $f(g(x)) = 0$ для всех x. Функция $g(f(x))$ может быть записана в виде

$$g(f(x)) = \begin{cases} [0] = 0, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ [1] = 1, \text{ если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Таким образом, $g(f(x))$ есть функция $f(x)$. Аналогично рассматриваются и другие случаи.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. При каких a и b функция $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + a \text{ при } x \leq 2, \\ x^2 - 4x + b \text{ при } x > 2 \end{cases}$ непрерывна на всей числовой прямой?

1) $a = b - 4$ 2) $a = b - 2$ 3) $a = b + 2$ 4) $a = b + 4$

Указание. Предел разности выражений, задающих функцию, при $x \to 2$ должен равняться 0.

1.4. Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}, \text{ если } x \geq 0,\ x \neq 1, \\ a, \text{ если } x = 1 \end{cases}$. При каком значении a функция $f(x)$ непрерывна на всей области определения?

1) $a = 0{,}25$ 2) $a = 0{,}5$ 3) $a = 0{,}75$ 4) $a = 1$

Указание. При $a = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$.

§ 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Цель параграфа — доказать непрерывность многочлена, дробно-рациональной функции, функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$; рассмотреть замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Как доказать непрерывность многочлена $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ на множестве R?

Ответ. Доказав непрерывность постоянной функции и функции $h(x) = x$ на множестве R, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций получаем непрерывность функций x^2, x^3, а затем по теореме о непрерывности суммы непрерывных функций получаем и непрерывность функции $P(x)$ на множестве R.

3.2. Как доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ непрерывна на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$?

Ответ. Эта функция непрерывна по теореме о непрерывности отношения непрерывных функций.

3.3. Как доказать, что $\sin 1^\circ < 0{,}0175$?

Ответ. $\sin 1^\circ = \sin \dfrac{\pi}{180} < \dfrac{\pi}{180} < \dfrac{3{,}15}{180} = 0{,}0175.$

3.4. Как доказать, что функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны в их естественных областях определения?

Ответ. Можно воспользоваться непрерывностью функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и теоремой о непрерывности отношения непрерывных функций в тех точках, где знаменатель отличен от нуля.

3.5. Чему равен $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x}$?

Ответ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{\sin x}{x}\right) = \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{5} \cdot 1 = \dfrac{1}{5}.$

3.6. Чему равен $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$?

Ответ. Пусть $\varphi(x) = 5x$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin 5x}{5x} \cdot 5\right) = 5 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 5 \cdot 1 = 5.$ Часто вычисления записывают короче: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(5 \cdot \dfrac{\sin 5x}{5x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 5 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 5.$

3.7. Пусть $a > 0$. Как доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$?

Ответ. Пусть $a > 1$ и $\sqrt[n]{a} = 1 + t_n$. Тогда $a = 1 + nt_n + \ldots$, откуда $0 < \sqrt[n]{a} - 1 = t_n < \dfrac{a-1}{n}$, и нужный результат получается из теоремы о пределе промежуточной функции. Случай $a < 1$ сводится к предыдущему, так как $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}$, где $\dfrac{1}{a} > 1$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.** Найдите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos \frac{1}{2n}\right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2+1}$.

Указание. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то для последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$. Далее в каждом из пунктов имеем следующее.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(n \sin \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1.$

б) $$\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\operatorname{tg} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 \sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 \sin\frac{1}{n} \sin^2\frac{1}{2n}}{\cos\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2n\sin\frac{1}{2n}\right)^2}{2\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos \frac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{4n} = \frac{1}{8} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(4n\sin\frac{1}{4n}\right)^2 = \frac{1}{8}.$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right) \cdot \left((n^2+1)\sin\frac{1}{n^2+1}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$

4. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3^x+1}{3^x-1}$;

в)* $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3\cdot 2^x-x^2}{x\cdot 2^x+x^2}$;

г)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8^x-1}{4^x-1}$;

д)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4^x-3\cdot 2^x+2}{4^x-4}$;

е)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{9^x-1}{3^x-1}$;

ё)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2^x-1} - \frac{2}{4^x-1}\right)$;

ж)* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{100^x - 0{,}01}{(10^x - 0{,}1)^2}$.

Указание. Задачи (а, б, в*) решаются элементарным применением теорем о пределах отношений, сумм и произведений. Рассмотрим подробнее остальные случаи.

г)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-1}{4^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{(2^x-1)(2^x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x+2^x+1}{2^x+1} = \dfrac{3}{2}$;

д)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4^x-3\cdot 2^x+2}{4^x-4} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2^x-2)(2^x-1)}{(2^x-2)(2^x+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-1}{2^x+2} = \dfrac{1}{4}$;

е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-1}{3^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3^x-1)(3^x+1)}{3^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}(3^x+1) = 2$; ё)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2^x-1} - \right.$

$\left.-\dfrac{2}{4^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{(2^x-1)(2^x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x+1} = \dfrac{1}{2}$; ж)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100^x-0{,}01}{(10^x-0{,}1)^2} =$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100^x(1-100^{-x-1})}{10^{2x}(1-10^{-x-1})^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-100^{-x-1}}{(1-10^{-x-1})^2} = 1.$

5.** Докажите, что при всех $x \neq 0$ выполняется неравенство $|\sin x| < |x|$.

Указание. В пункте 4.3 неравенство $|\sin x| < |x|$ доказано для $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Если $|x| \geq \dfrac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 \leq \dfrac{\pi}{2} \leq |x|$, и тем самым неравенство также доказано.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Чему равно значение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x}{\operatorname{tg}2x}$?

1) 2 2) 0 3) $\dfrac{1}{2}$ 4) не существует

Указание. $\dfrac{x\cdot\cos x}{\operatorname{tg}2x} = \dfrac{x\cdot\cos 2x}{2\sin x}$.

2.1. Какие из указанных функций непрерывны на всей числовой прямой?

1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$ 4) $f(x)=\sqrt{x^2-8x+13}$

Указание. Выбрать варианты, в которых функции определены всюду.

2.3.* Укажите, для каких функций значение $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ равно $\dfrac{2}{5}$.

1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\frac{5}{2}x}$ 2) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}5x}{2x}$ 3) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{tg}5x}$ 4) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg}5x}$

Указание. Использовать обобщения замечательного предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{x}=b$.

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

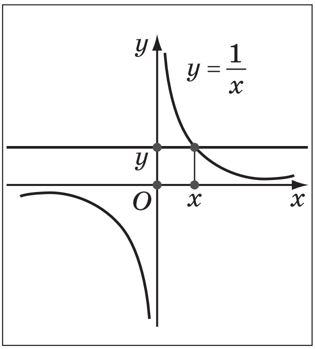
Цель параграфа — доказать теорему о нуле непрерывной функции и, как следствие, получить из неё теорему о промежуточных значениях непрерывной функции; без доказательства сформулировать теорему о непрерывности функции, которая является обратной к непрерывной функции; исследовать на непрерывность функции $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Особенности параграфа. В самом начале следует напомнить учащимся условие обратимости функции и понятие обратной функции. Желательно пояснить условие обратимости геометрически. А именно пусть функция $f(x)$ определена в области D и $E = \{f(x) \mid x \in D\}$ — множество значений, которые она принимает на множестве D. Функция $f(x)$, рассматриваемая на множестве D, имеет обратную функцию, которая определена на множестве E, если каждая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $y \in E$ оси Oy, пересекает график функции $f(x)$ в единственной точке. Уяснив смысл обратимости функции, разобрать с учащимися содержание теорем 8–10 и перейти к исследованию непрерывности функций $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным понятие обратной функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Как доказать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, определённая при всех $x \neq 0$, имеет обратную функцию?



Ответ. Проверим условие обратимости данной функции. Допустим, что эта функция принимает одинаковые значения в точках $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, то есть $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2}$. Умножив это равенство на произведение $x_1 x_2$, получим $x_1 = x_2$. Следовательно, условие обратимости выполняется. Геометрически это означает, что прямая, проходящая через произвольную точку $y \neq 0$ на оси Oy и параллельная оси Ox, пересекает график функции $f(x)$ в единственной точке $(x; y)$ (см. рис.). Обратная функция $g(y)$ связана с функцией $f(x)$ условием: $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Поэтому $g(y) = \frac{1}{y}$, и, таким образом, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ сама себе обратна.

4.2. Как доказать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на интервале $\left(0; \frac{1}{2}\right)$?

Ответ. Функция $f(x) = x^3 - 3x + 1$ непрерывна на всей числовой прямой, а на концах отрезка $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ принимает значения разных знаков 1 и $-\frac{3}{8}$ соответственно, причём, по теореме 9, найдётся такое число c, что $0 < c < \frac{1}{2}$ и $f(c) = 0$.

4.3. Как доказать, что функция $f(x) = x^2$ принимает все значения из промежутка $[0; \infty)$?

Ответ. Очевидно, что функция $f(x) = x^2$ принимает нулевое значение при $x = 0$. Покажем, что любое число $y > 0$ также является значением этой функции. Возьмём какое-нибудь натуральное $n > y$. Понятно, что $n^2 \geq n > y$, поэтому число y лежит между $f(0) = 0$ и $f(n) = n^2$. Учитывая непрерывность функции $f(x) = x^2$ и применяя теорему 8, заключаем, что на промежутке $[0; n]$ найдётся такое число c, что $f(c) = y$.

4.4. Как показать, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ удовлетворяет условию обратимости на множестве R всех действительных чисел?

Ответ. Всякая функция $y = f(x)$, обратная к некоторой функции $x = g(y)$, обязательно удовлетворяет условию обратимости. Если определить данную функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ как обратную к $g(y) = y^3$, то никакого доказательства не потребуется. Тем не менее мы всё же приведём непосредственное обоснование. Пусть при некоторых x_1 и x_2 выполняется равенство $\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2}$. При возведении в куб обеих частей этого равенства оно, очевидно, сохранится и превратится в $x_1 = x_2$. А это равносильно условию обратимости.

4.5. Как доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\right) = 0$?

Ответ. Из непрерывности логарифмической функции следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_2\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\right) = \log_2\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\right) = \log_2 1 = 0.$

4.6. Как доказать непрерывность функции $f(x) = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x$ на всей области определения?

Ответ. Разумеется, можно повторить рассуждения пункта 4.6 и доказать непрерывность каждой из функций $y = \mathrm{arctg}x$ и $y = \mathrm{arcctg}x$ на всей числовой оси, откуда будет следовать требуемый результат. Однако, если заметить, что $f(x) = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x \equiv \frac{\pi}{2}$, непрерывность функции $f(x)$ станет очевидной, так как эта функция принимает одно и то же значение на всей числовой оси.

4.7. Как доказать непрерывность функции $y = \lg(1 - x^2)$ на интервале $(-1; 1)$?

Ответ. Если $a \in (-1; 1)$, то точка $b = 1 - a^2$ принадлежит интервалу $(0; 1)$. При этом функция $g(x) = 1 - x^2$ непрерывна в точке a, а функция $f(z) = \lg z$ непрерывна в точке b. По теореме о непрерывности сложной функции функция $f(g(x)) = \lg(1 - x^2)$ непрерывна в точке a.

Указания к решению наиболее трудных задач

4.** С точностью до 0,1 найдите:

а) корень уравнения $x^2 - 2x - 2 = 0$ из интервала $(-1; 0)$;

б) корень уравнения $x = \frac{1}{x^2+1}$.

Указание. а) Для поиска приближённого значения корня можно использовать метод деления пополам. Пусть непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах промежутка $[a; b]$, тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет на интервале $(a; b)$ по крайней мере один корень. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам и выберем ту половину, на концах которой функция принимает значения разного знака. Искомый корень лежит в этой половине промежутка $[a; b]$. Данную процедуру надо продолжать до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше удвоенной точности приближения (в нашем случае меньше 0,2). Середина последнего отрезка будет искомым приближённым значением корня.

б) Заметить, что уравнение имеет корень из промежутка $[0; 1]$, а затем действовать, как приведено в указании для а).

6.* Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$; е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

Указание. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\dfrac{1}{32}$.

в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to6}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+2}=\dfrac{1}{4}$.

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-1}=3$.

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)\left(1+\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)}{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=\dfrac{5}{3}$.

е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(5-x)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{(5-x)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}=3$.

10.* Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}x}{2x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\arccos\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}\right)$.

Указание. а) Так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x}=\dfrac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to0}\left(\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}x}{2x}\right)=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

б) Так как $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x-2}=0$, то $\lim\limits_{x\to1}\left(\arccos\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}\right)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$.

11.** Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x+2}}\right)$.

Указание. Так как $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x^2-x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{x+\sqrt{x+2}}{(x+1)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \frac{2}{3}$, то $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x+2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

14.** Докажите непрерывность функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n — фиксированное натуральное число на промежутке $[0; \infty)$.

Указание. Для определённости рассмотрите какой-нибудь конкретный промежуток с неотрицательными концами, например $[0; 7]$. Далее достаточно заметить, что промежуток $[0; \infty)$ является объединением всех подобных ограниченных промежутков.

15.** Докажите непрерывность функции $y = \log_a x$, где a — такое фиксированное число, что $a > 0$ и $a \neq 1$ на промежутке $[0; \infty)$.

Указание. Промежуток $[0; \infty)$ является объединением ограниченных промежутков вида $[0; n)$, где $n \in N$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Какая из функций является обратной к функции $f(x) = \frac{1}{x}$, рассматриваемой на промежутке $(-\infty; 0)$?

1) $g(x) = x$ на промежутке $(-\infty; 0)$
2) $g(x) = -x$ на промежутке $(0; \infty)$
3) $g(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$
4) $g(x) = -\frac{1}{x}$ на промежутке $(0; \infty)$

Указание. График обратной функции симметричен графику заданной функции относительно биссектрисы первого координатного угла.

1.4. Какая из функций является обратной к функции $f(x) = x^2 + 1$, рассматриваемой на промежутке $(0; \infty)$?

1) $g(x) = \sqrt{x+1}$ на промежутке $(0; \infty)$
2) $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ на промежутке $(1; \infty)$
3) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ на промежутке $(0; \infty)$
4) $g(x) = \sqrt{x-1}$ на промежутке $(1; \infty)$

Указание. Составить равенство $y = x^2 + 1$, из которого выразить переменную x через y. Затем воспользоваться тем, что график обратной функции симметричен графику заданной функции относительно биссектрисы первого координатного угла.

2.3.** Какие из приведённых выражений задают функцию, которая является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$?

1) $\frac{3\pi}{2} - \arcsin x$ 2) $\frac{\pi}{2} + \arccos x$

3) $\pi - \arcsin x$ 4) $\frac{\pi}{2} + \arcsin x$

Указание. Выделить указанную часть графика и симметрично отобразить относительно биссектрисы первого координатного угла. Полученный результат сравнить с графиками функций из приведённых вариантов.

Аналогично можно получить ответ к тесту 2.4.**

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОНОТОННОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ

Цель параграфа — показать, как применять свойства монотонности и непрерывности функций при решении некоторых уравнений и неравенств.

Особенности параграфа. С учётом того, что обобщение метода интервалов решения неравенств на случай произвольных непрерывных функций довольно непросто, весь параграф изучается на втором уровне.

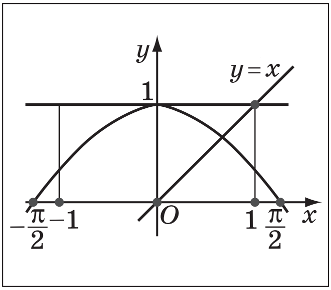
Ответы на открытые вопросы к пунктам

5.1.* Какие корни имеет уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{x-1} = 2$?

Ответ. Уравнение $2^{x^2} \cdot 3^{x-1} = 2$ равносильно уравнению $x^2 + (x-1)\log_2 3 - 1 = 0$ или уравнению $(x-1)(x + 1 + \log_2 3) = 0$, корнями которого являются числа $-1 - \log_2 3$ и -1.

5.2.* Как доказать, что уравнение $x = \cos x$ имеет единственный корень?

Ответ. Если $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$, то $|x| > 1$, но $|\cos x| \le 1$. Следовательно, вне отрезка $[-1; 1]$ уравнение $x = \cos x$ не имеет корней. Если $x \in [-1; 0]$, то $x \le 0$, но $\cos x > 0$. Поэтому на про-



межутке $[-1;\ 0]$ уравнение $x = \cos x$ также не имеет корней (см. рис.). На отрезке $[0;\ 1]$ функция $y = \cos x - x$ строго убывает, так как её можно представить в виде суммы двух убывающих на этом отрезке функций $p(x) = \cos x$ и $q(x) = -x$. При этом функция $y = \cos x - x$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[0;\ 1]$ значения противоположных знаков. По теореме 8 существует такое число a из промежутка $[0;\ 1]$, при котором функция $y = \cos x - x$ обращается в нуль, то есть $\cos a - a = 0$. Вследствие строгой монотонности функции $y = \cos x - x$ число a будет единственным корнем уравнения $x = \cos x$.

5.3.* Как доказать непрерывность функции $f(x) = \log_{x+4}(x^2 - 1)$ на всей области определения?

Ответ. Областью определения функции $f(x)$ является множество $D = (-4;\ -3) \cup (-3;\ -1) \cup (1;\ \infty)$. На этом множестве данную функцию можно представить в виде $f(x) = \log_{x+4}(x^2-1) = \frac{\log_a(x^2-1)}{\log_a(x+4)}$, то есть функция $f(x)$ получена из непрерывной функции $y = \log_a x$ с помощью операций образования сложных функций и деления.

Указания к решению наиболее трудных задач

4.** Приведите пример строго положительных и строго убывающих на промежутке D функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$:

а) возрастает на D; б) убывает на D;

в) не является монотонной на D.

Указание. Например, а) $\left(\frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x^2}\right)$ на промежутке $[2;\ 5]$; б) $\left(\frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x}\right)$ на промежутке $[2;\ 5]$; в) $\left(\frac{1}{\log x}\right) : \left(\frac{1}{x}\right)$ на промежутке $(0;\ 1]$.

6.** Приведите пример таких строго возрастающих на промежутке D функций $f(x)$ и $g(x)$, что $f(x) > 0$, $g(x) < 0$, а функция $f(x) \cdot g(x)$: а) возрастает на D; б) убывает на D; в) не является монотонной на D.

Указание. Например: а) $f(x) = x$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $D = (0;\infty)$; б) $f(x) = x^2$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, $D = (0;\infty)$; в) $f(x) = x$, $g(x) = x - 1$, $D = (0;1)$.

8.** Докажите, что: а) $f(x) = x^3 - x$ возрастает на $[1;\ 7]$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2^x}$ убывает на $(0;\ \infty)$; в) $f(x) = (x+1)\cdot 2^{x-1}$ возрастает на $[-1;\ \infty)$; г) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ возрастает на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; д) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ возрастает на $[1;\infty)$; е) $f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ возрастает на $[1;\infty)$.

Указание. а) $f(x) = x(x^2 - 1)$, причём оба сомножителя неотрицательны и возрастают при $x \geq 1$; б) оба слагаемых убывают; в), г) оба сомножителя возрастают и больше 0; д) пусть $x > y \geq 1$, тогда $f(x) - f(y) = \dfrac{(x-y)(xy-1)}{xy} > 0$; е) пусть $x > y \geq 1$, $p = \sqrt{x}$, $q = \sqrt{y}$, тогда $f(x) - f(y) = \dfrac{(p-q)\big(pq(p^2+pq+q^2)-1\big)}{pq} > 0$.

10.** Решите неравенство:

а) $\dfrac{2}{\log_2(x-1)} + 1 \leq \dfrac{\log_2(x^2-x+1)}{\log_2(x-1)}$;

б) $\log_{x^2-1}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\right) \geq 1$; в) $\log_{x^2+2x-3}\dfrac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0$;

г) $\log_{2x^2-x}\big(|x+2|-|x|\big) > \log_{2x^2-x}\sqrt{2-x^2}$;

д) $\log_{x^2+x+1}|x+3| > \log_{x^2+x+1}\big(\sqrt{x^2-1} - x\big)$;

е) $\log_{|x|}\dfrac{|x+3|-|x|}{2-x} > 1$; ё) $\dfrac{1}{|\log_2 x|-1} \geq \dfrac{1}{|\log_2 2x|-2}$.

Указание. Неравенства (б — е) решаются одним и тем же способом. Сначала надо избавиться от логарифмов, используя возрастание логарифмической функции с основанием, большим единицы, и убывание, когда основание принадлежит промежутку (0; 1). В каждом из случаев (б — е) получится по две системы неравенств, не содержащие логарифмов, которые решаются стандартными методами. Задачу а) надо предварительно привести к виду $\log_{x-1}(4x-4) \leq \log_{x-1}(x^2-x+1)$, а затем воспользоваться приведённым выше методом. В задаче ё) целесообразно ввести новую переменную $y = \log_2 x$ и переписать исходное неравенство в виде $\dfrac{1}{|y|-1} \geq \dfrac{1}{|y+1|-2}$.

11.** Решите неравенство $\dfrac{x+1}{(x+2)\log_4\left(x^2+3x+\dfrac{5}{2}\right)} \geq 0.$

Указание. Рассмотрите всевозможные допустимые сочетания знаков выражений в числителе и знаменателе данной дроби.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Какое из множеств является множеством всех решений неравенства $\dfrac{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-2)^2}$?

1) $[1;\,4)\cup[9;\,\infty)$ 2) $[1;\,4)\cup(4;\,9]$

3) $[0;\,1]\cup[9;\,\infty)$ 4) $[0;\,1]\cup(2;\,9]$

Указание. При замене $y = \sqrt{x}$ получить неравенство $\dfrac{(y-1)\cdot(y-3)}{(y-2)^2} \leq 0$ и затем из его корней выбрать неотрицательные числа. Множество квадратов найденных чисел будет ответом к тесту.

2.4. Выберите верные утверждения.

1) пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\,b]$ и ни в одной точке этого промежутка не обращается в нуль. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

2) пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a;\,b)$ и ни в одной точке этого промежутка не обращается в нуль. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

3) пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ и принимает в концах значения разных знаков. Тогда найдётся такое число c из промежутка $(a;\,b)$, что $f(c) = 0$

4) пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ и принимает в концах значения одного знака. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

Указание. Варианты 1–3 соответствуют утверждению о знакопостоянстве функции, непрерывной на промежутке и не имеющей на этом промежутке нулей; к варианту 4 нетрудно привести контрпример.

Глава 2
СФЕРА И ШАР

Цель главы — рассмотреть геометрические подходы к решению задач со сферами.

Особенности главы. При решении задач со сферами наиболее часто приходится рассматривать взаимное расположение сферы и плоскости. Поэтому одним из основных утверждений, которому посвящён целый параграф, является теорема о пересечении сферы с плоскостью, откуда следуют условия касания сферы с плоскостью или прямой, а также те геометрические конструкции, на которых основываются изучаемые в последующем способы решения задач. Далее, ещё одним важным обстоятельством является то, что рассматриваемые конструкции постоянно опираются на умение проводить прямые, перпендикулярные либо плоскости, либо прямой. Поэтому при работе с материалом данной главы приходится вспоминать практически весь курс стереометрии.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРЫ И ШАРА

Цель параграфа — напомнить определения сферы и шара, изучить основную теорему о пересечении сферы с плоскостью, определение и свойства плоскости, касательной к сфере, рассмотреть условие касания двух сфер.

Особенности параграфа. Изучение взаимного расположения сферы и плоскости составляет основу для решения задач со сферами, тем более что окончательное утверждение имеет вполне естественный вид, а поэтому легко запоминается. При рассмотрении данного материала следует обратить внимание на то, чтобы учащиеся научились выявлять случаи касания сферы с плоскостью и вычислять радиус окружности в том случае, когда пересечением сферы с плоскостью является окружность.

На третьем уровне дополнительно следует хорошо разобраться с особенностями доказательства основной теоремы о пересечении сферы с плоскостью и с доказательством свойства внутренних точек шара.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: определение перпендикулярности прямой и плоскости; свойства и признаки перпендикулярности прямой и плоскости.

Новые математические понятия и свойства: сфера; шар; пересечение сферы с плоскостью; касание сферы с плоскостью; касание сфер.

Вспомогательные математические понятия: внутренние, внешние и граничные точки шара.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какие точки шара называются граничными?

Ответ. Точки сферы, которая ограничивает данный шар.

1.2. Почему в случае IV на плоскости α нет точек сферы, отличных от точек окружности S?

Ответ. В этом случае центр O сферы является центром окружности S, а поэтому в секущей плоскости α все точки, удалённые от точки O на расстояние R, — это точки окружности S.

1.3. Как доказать, что если плоскость α проходит через точку M сферы S радиуса R с центром O и $OM \perp \alpha$, то плоскость α касается сферы S?

Ответ. Если точка N плоскости α не совпадает с точкой M, то $ON > OM$. Поэтому $ON > R$, а значит, точка N не принадлежит сфере S. Следовательно, плоскость α и сфера S имеют единственную общую точку — точку M.

1.4. Какая точка шара находится на наименьшем расстоянии от некоторой данной плоскости?

Ответ. В этом вопросе предполагается, что плоскость не имеет общих точек с шаром. Ответом на вопрос является ближайшая к плоскости точка пересечения шара с прямой, которая проходит через центр шара и перпендикулярна прямой.

1.5. Могут ли сферы касаться, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов?

Ответ. Могут, но в этом случае сферы будут касаться, если расстояние между центрами сфер равно модулю разности радиусов сфер.

1.6.** При каком условии один шар целиком находится вне другого шара?

Ответ. Когда расстояние между центрами шаров больше суммы их радиусов.

Указания к решению наиболее трудных задач

1.* Пусть две сферы имеют более одной общей точки. Докажите, что линия пересечения этих сфер — окружность.

Указание. Из каждой общей точки этих сфер опустить перпендикуляр на прямую, содержащую центры сфер, и установить, что основания всех перпендикуляров совпадают, а длины перпендикуляров равны.

3.** Точка A лежит за пределами шара S. Каково множество всех точек касания шара S со всевозможными касательными плоскостями, проходящими через точку A?

Указание. Искомым множеством является окружность. Для обоснования из каждой точки касания сферы с одной из проводимых плоскостей опустить перпендикуляр на прямую, содержащую точку A и центр сферы, и установить, что основания всех перпендикуляров совпадают, а длины перпендикуляров равны.

8.* Две параллельные плоскости пересекают сферу по окружностям радиусов r_1, r_2. Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно h.

Указание. Решение задачи сводится к вычислению радиуса окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями $2r_1$, $2r_2$ и высотой h.

9. Шар радиуса 5 касается плоскости α. Точка A лежит на плоскости α на расстоянии 12 от точки касания. Найдите:

а) наименьшее расстояние от A до точек шара;

б)* наибольшее расстояние от A до точек шара.

Указание. Сначала найти, что расстояние от точки A до центра шара равно 13. Далее, из того, что сфера с центром в точке A и радиусом $(13 - 5)$ касается данного шара, следует, что наименьшее из расстояний равно 8. Аналогично доказывается, что наибольшее из расстояний равно $(13 + 5)$.

10.** Пересечение некоторой пространственной фигуры Φ с любой плоскостью есть либо круг, либо точка, либо пустое множество. Докажите, что фигура Φ — шар.

Указание. Рассмотрим одно из возможных доказательств. Прежде всего заметим: из условия задачи следует, что каждая прямая либо не пересекает Φ, либо имеет с Φ единственную общую точку, либо пересекает фигуру Φ по отрезку.

Далее, если фигура Φ состоит только из одной точки, то всё ясно.

Пусть фигура Φ содержит более одной точки. Тогда можно рассмотреть сечение фигуры Φ плоскостью, в которой больше одной точки. Но тогда, как это следует из условия, в сечении получается круг, границу которого обозначим через s_1.

Пусть AB — хорда окружности s_1. Рассмотрим теперь сечение фигуры Φ плоскостью β, которая проходит через середину AB и перпендикулярна AB. В сечении фигуры Φ плоскостью β также получается круг, границу которого обозначим через s_2. Пусть MN — диаметр окружности s_2, который пересекает отрезок AB. Плоскость, проходящая через точки A, B, M, N, также пересекает фигуру Φ по кругу, причём AB и MN являются хордами этого круга. Следовательно, сфера с диаметром MN проходит также и через точки A и B. Обозначим через P шар, ограниченный этой сферой. Каждая плоскость γ, проходящая через прямую AB, пересекает окружность s_2 в точках, которые обозначим через C и D. Тогда плоскость γ пересекает фигуру Φ по кругу, граница которого содержит точки A, B, C, D, а шар P пересекает также по этому кругу. Следовательно, всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB, одинаково пересекают как Φ, так и P, а поэтому фигура Φ совпадает с шаром P.

11.** Шар касается граней двугранного угла. Докажите, что плоскость, проходящая через ребро угла a и центр шара, делит двугранный угол пополам.

Указание. Если O — центр шара и OA, OB — радиусы, проведённые в точки касания с гранями двугранного угла, то плоскость OAB перпендикулярна ребру двугранного угла. Поэтому при пересечении двугранного угла плоскостью OAB получается линейный угол двугранного угла. Тогда $OA \perp MA$, $OB \perp MB$, откуда следует, что MO — биссектриса угла AMB.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. На расстоянии 99 от центра сферы радиуса 100 проводится плоскость. Какому из промежутков принадлежит значение радиуса окружности, полученной в сечении сферы?

1) (5;10) 2) (10;15) 3) (15;20) 4) (20;25)

Указание. Радиус окружности равен $\sqrt{199}$.

2.1. Две сферы радиусов $R_1 = 8$ и $R_2 = 12$ касаются одной плоскости. Каким может быть расстояние между центрами этих сфер?

1) 2 2) 4 3) 20 4) 200

Указание. Наименьшее расстояние равно модулю разности радиусов, а любое большее расстояние может достигаться.

2.4. При каких значениях расстояния d от центра сферы радиуса R до плоскости радиус сечения сферы этой плоскостью будет меньше R?

1) $d = \frac{1}{2}R$ 2) $d = \frac{2}{3}R$ 3) $d = \frac{3}{5}R$ 4) $d = \frac{5}{7}R$

Указание. Радиусом окружности сечения сферы с плоскостью может быть любое положительное значение, меньшее радиуса сферы.

§ 2. ОПИСАННЫЕ СФЕРЫ

Цель параграфа — изучить понятия сферы, описанной вокруг многогранника, и многогранника, вписанного в сферу, рассмотреть способы вычисления радиуса сферы, описанной вокруг многогранника.

Особенности параграфа. При решении задач с описанными сферами следует обратить внимание на то, что в этом случае сфера проходит через несколько заданных точек, и с этим связаны две важные закономерности. Первая из них является следствием теоремы о сечении сферы плоскостью и приводит к тому, что если сфера проходит через три вершины треугольника, то плоскость треугольника пересекает сферу по окружности, причём центр сферы лежит на прямой, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной вокруг треугольника окружности. Вторая закономерность относится к сфере, проходящей через концы заданного отрезка. В этом случае центр сферы находится в плоскости, проходящей через середину отрезка и перпендикулярной к этому отрезку. При решении задач попытки применения указанных свойств, как правило, позволяют отыскать путь к достижению цели. Отметим, что среди таких попыток могут быть как удачные, достаточно быстро приводящие к ответу, так и не очень удачные, приводящие к громоздким построениям. Поэтому при решении многих задач со сферами полезно экспериментировать, оценивать перспективы каждой из предпринятых попыток, рассматривать разные варианты подходов и учиться сравнивать преимущества или недостатки каждого из них.

На первом уровне рассматриваются простейшие задачи со сферами, описанными около правильной пирамиды. На втором уровне разбирается пример со сферой, описанной около призмы. На третьем уровне рассматриваются некоторые обобщённые подходы к задачам на описанные сферы.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: теорема о пересечении сферы с плоскостью.

Новые математические понятия: сфера, описанная около многогранника; многогранник, вписанный в сферу.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. В каком случае около параллелепипеда можно описать сферу?

Ответ. Грани параллелепипеда — четырёхугольники, являющиеся параллелограммами. Так как около параллелограмма можно описать окружность только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником, то сферу можно описать только тогда, когда все грани параллелепипеда являются прямоугольниками.

2.2. Может ли центр сферы, описанной около пирамиды, находиться вне пирамиды?

Ответ. Может. Например, если боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды меньше рёбер основания.

2.3. Где находится центр сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда?

Ответ. В точке пересечения главных диагоналей.

2.4.** Как доказать, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу?

Ответ. Доказать это можно, например, следующим способом. Пусть $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида. Каждая грань этой пирамиды является треугольником, в частности грань ABC. Поэтому существует центр O окружности, описанной около треугольника ABC. Точки прямой l, которая проходит через точку O и перпендикулярна плоскости ABC, равноудалены от точек A, B и C. Далее, рассмотрим плоскость α — серединный перпендикуляр к ребру AD, —

точки которой равноудалены от точек A и D. Прямая l не параллельна плоскости α, так как если предположить, что $l \perp \alpha$, то $l \perp AD$, откуда следует, что точка D лежит в плоскости ABC; но этого не может быть по определению треугольной пирамиды. В итоге получаем, что прямая l пересекается с плоскостью α, а их точка пересечения равноудалена от всех вершин пирамиды $ABCD$.

Указания к решению наиболее трудных задач

1. Докажите, что если около призмы можно описать сферу, то эта призма — прямая. Верно ли, что сферу можно описать около любой прямой призмы?

Указание. В этом случае около каждого из оснований можно описать окружность, причём отрезок, соединяющий центры окружностей, параллелен боковому ребру. С другой стороны, центр сферы находится на прямой, которая перпендикулярна основаниям и проходит через центры окружностей.

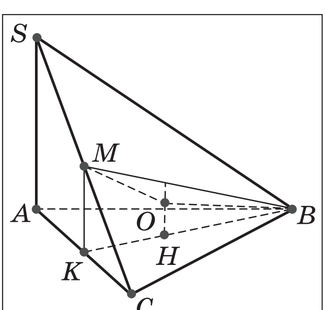
4. В основании четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 2. Одно из боковых рёбер равно 3 и перпендикулярно к основанию. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Указание. Эту пирамиду можно достроить до прямоугольного параллелепипеда, и описанная сфера у них общая.

7.* В пирамиде $ABCD$ рёбра AB и CD имеют длину 4, остальные рёбра имеют длину $2\sqrt{11}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$.

Указание. Центр сферы совпадает с серединой отрезка, концы которого являются серединами рёбер AB и CD.

8.** В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC с ребром 1, ребро SA перпендикулярно основанию и $SA = 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, C и через середину ребра SC.



Указание. Пусть M — середина ребра SC, K — середина ребра AC, H — центр треугольника ABC. Тогда центр O сферы находится на прямой, проходящей через точку H и параллельной прямой MK (см. рис.), причём $OM = OB$. Далее, если $OH = x$, то $OB^2 = x^2 + \frac{1}{3}$, $OM^2 = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + \frac{1}{12}$, откуда $x^2 + \frac{1}{3} = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + \frac{1}{12}$,

$x = \frac{2}{3}$, $R = OB = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.* Вокруг правильных треугольных пирамид с ребром основания, равным a, описываются сферы. Какое наименьшее значение может иметь радиус сферы?

1) a 2) $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $a\frac{\sqrt{3}}{6}$

Указание. Радиус сферы не больше, чем радиус окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

1.3. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2a$. Известно, что центр описанной вокруг пирамиды сферы находится на основании пирамиды. Чему равна длина бокового ребра пирамиды?

1) $a\sqrt{2}$ 2) $a\sqrt{3}$ 3) $2a$ 4) $a\sqrt{5}$

Указание. Боковое ребро равно гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом $a\sqrt{2}$.

2.1.* В правильной треугольной пирамиде на высоте SH, проведённой к основанию, выбрана точка F. В каких из перечисленных случаев точка F не может быть центром описанной сферы, если известно, что:

1) $SF : FH = 3 : 1$ 2) $SF : FH = 2 : 1$
3) $SF : FH = 1 : 1$ 4) $SF : FH = 1 : 2$

Указание. В случаях, когда не выполняется условие $SF : FH > 1$.

2.2. Каким не может быть основание четырёхугольной пирамиды, вписанной в сферу?

1) прямоугольником
2) ромбом с углом 60°
3) трапецией с прямым углом
4) четырёхугольником $ABCD$, у которого $\angle A = \angle C = 90^\circ$

Указание. Должна существовать окружность, описанная вокруг основания пирамиды.

§ 3. СФЕРЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТЕЙ

Цель параграфа — изучить понятия сферы, вписанной в многогранник, и многогранника, описанного вокруг сферы, рассмотреть способы вычисления радиуса сферы, вписанной в многогранник.

Особенности параграфа. На первом уровне рассматриваются задачи на вычисление радиуса сферы, вписанной в правильную пирамиду. При этом основной результат, состоящий в том, что центр вписанной сферы лежит на высоте правильной пирамиды, формулируется без доказательства.

На втором уровне изучается основная конструкция, приводящая к тому, что центр сферы, касающейся граней двугранного угла, расположен в биссекторной плоскости этого угла. Затем рассматриваются приложения этой конструкции к решению задач.

На третьем уровне дополнительно обращается внимание на некоторые особые приёмы вычисления радиуса вписанной сферы, что демонстрируется на примере решения одной из непростых задач.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: определение двугранного угла, линейного угла; понятие биссектора двугранного угла; определение касания сферы с плоскостью.

Новые математические понятия: сфера, вписанная в многогранник; многогранник, описанный около сферы.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Где находятся центры сфер, касающихся данной плоскости в данной точке?

Ответ. На прямой, которая проходит через указанную точку и перпендикулярна плоскости.

3.2. Как доказать, что плоскость ASM перпендикулярна плоскости SBC (рис. 1)?

Ответ. Так как $AM \perp BC$ и $SM \perp BC$, то $ASM \perp BC$. Поэтому $BC \perp ASM$, откуда $SBC \perp ASM$.

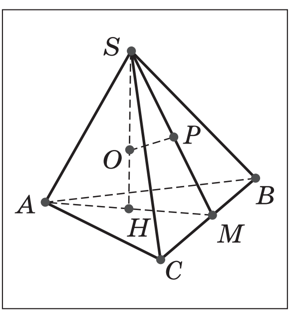


Рис. 1

3.3. Пусть сфера касается граней данного двугранного угла и известна одна из точек касания. Как в этом случае построить центр сферы?

Ответ. Центром сферы является точка пересечения прямой, проходящей через точку касания и перпендикулярной к данной грани, с биссектором двугранного угла. Чтобы найти эту точку, следует построить соответствующий линейный угол, биссектрису линейного угла, а затем через точку касания провести перпендикуляр к соответствующей стороне линейного угла.

3.4.* Как доказать, что биссекторы двугранных углов любого трёхгранного угла имеют общую прямую?

Ответ. Каждая точка биссектора двугранного угла равноудалена от его граней. Поэтому точки пересечения биссекторов двух двугранных углов равноудалены от всех трёх граней, а поэтому принадлежат биссектору третьего двугранного угла.

3.5.** В пункте рассматривается задача: «В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ в основании лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые грани пирамиды образуют с основанием углы в 60°. Найти радиус сферы, касающейся граней $ABCD$, SAB, SAD и плоскости BSD». *Вопрос.* Чему равен радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABCD$?

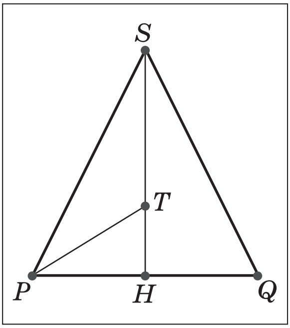


Рис. 2

Ответ. Рассмотрим плоскость, которая проходит через вершину S пирамиды и середины P, Q рёбер AB, CD (рис. 2). Пересечение биссектрисы угла SPH с высотой SH является центром T сферы, вписанной в пирамиду $SABCD$. Для вычисления радиуса сферы находим $PH = 1$, $\angle TPH = 30°$, $TH = PH \cdot \operatorname{tg}\angle TPH = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

4.** Докажите, что в каждую правильную пирамиду можно вписать сферу.

Указание. Достаточно доказать, что биссектор двугранного угла пирамиды при каждом ребре основания пирамиды пересекает высоту пирамиды в одной и той же точке.

7.* В правильный тетраэдр с ребром a вписан шар. Найдите радиус шара, вписанного в трёхгранный угол с вершиной A и касающегося первого шара.

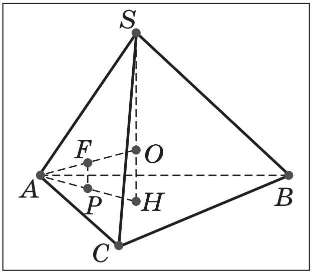


Рис. 3

Указание. Если O — центр шара, вписанного в правильный тетраэдр $SABC$, то центр F второго шара находится на отрезке AO (рис. 3). Проведя $FP \perp AH$, получаем, что отрезок FP равен радиусу второго шара. После этого вычислив $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $OH = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ и обозначив $FP = x$, из подобия треугольников AFP и AOH получим $AF = 3x$, $OF = \frac{a\sqrt{6}}{4} - 3x$. Используя условие касания шаров, составим уравнение $\frac{a\sqrt{6}}{4} - 3x = \frac{a\sqrt{6}}{12} + x$, откуда $x = \frac{a\sqrt{6}}{24}$.

8.** В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 1, боковые грани образуют угол в $60°$ с плоскостью основания. В трёхгранные углы с вершинами A и D вписаны сферы радиусов $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ и $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите расстояние между центрами этих сфер.

Указание. Сначала из условия находим высоту $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и радиус $OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ сферы, вписанной в пирамиду. Далее используем свойство, что центр E сферы, вписанной в трёхгранный угол при вершине A, находится на луче AO. Поскольку радиус EP по условию равен $\frac{\sqrt{3}}{12}$, то есть равен $\frac{1}{2}OH$, то точка P находится в середине отрезка AH (рис. 4). Аналогично получим, что центр F сферы, вписанной в трёхгранный угол при вершине D, находится на луче DO, а поскольку радиус FQ по условию равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$, то есть равен $\frac{3}{2}OH$, то точ-

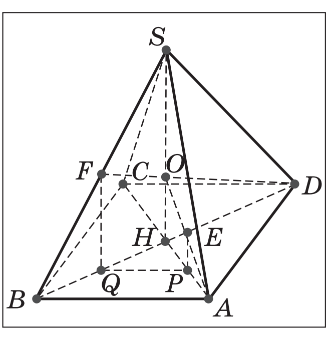


Рис. 4

ка Q находится в середине отрезка BH. После этого из прямоугольной трапеции $EPQF$ вычислим расстояние между центрами сфер: $EF = \sqrt{PQ^2 + (FQ - EP)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Чему равна главная диагональ куба, вписанного в сферу радиуса R?

1) R 2) $R\sqrt{2}$ 3) $R\sqrt{3}$ 4) $2R$

Указание. Центр сферы — середина главной диагонали куба.

2.2.* Сфера с центром O касается в точках E, F и H боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1. Какими свойствами обладает плоскость EFH?

1) точка O принадлежит плоскости EFH

2) плоскость EFH перпендикулярна плоскости AA_1BB_1

3) плоскость EFH перпендикулярна прямой CC_1

4) каждая прямая плоскости AA_1BB_1 перпендикулярна плоскости EFH

Указание. Плоскость, которая проходит через два перпендикуляра к заданным пересекающимся плоскостям, перпендикулярна прямой пересечения заданных плоскостей.

2.3. Два шара радиусов R и r касаются друг друга и касаются одной плоскости. Чему равно расстояние между точками касания этих шаров с плоскостью?

1) $2\sqrt{Rr}$ 2) $\sqrt{2Rr}$ 3) $\frac{1}{2}\sqrt{Rr}$ 4) $\sqrt{2}Rr$

Указание. Центры шаров и точки касания являются вершинами прямоугольной трапеции.

2.4. Какие из указанных значений не может принимать радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания, равным 6?

1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) 2 4) $\sqrt{5}$

Указание. Радиус сферы меньше, чем радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

§ 4. СФЕРЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫХ

Цель параграфа — рассмотреть некоторые свойства прямых, касающихся одной сферы.

Особенности параграфа. Из задач со сферами наиболее трудные те задачи, в которых сфера касается одной или нескольких прямых. Поэтому на первом уровне рассматриваются простейшие задачи на касание сферы с прямой, а бо́льшая часть параграфа рассчитана на второй уровень.

Условие касания сферы с прямой соответствует тому, что отрезок, соединяющий точку касания с центром сферы, перпендикулярен к этой прямой. Поэтому при решении задач на касание сферы с прямой на первый план выходит построение перпендикуляра к прямой в пространстве. При этом на практике чаще всего приходится использовать конструкцию, основанную на теореме о трёх перпендикулярах, которая изучалась в 10 классе. Именно на эту особенность и следует обратить внимание при работе с данным параграфом. Кроме этого, рассматриваются также применения основной теоремы о сечении сферы с плоскостью, когда сфера касается сторон заданного угла, и свойства равенства отрезков касательных, проведённых к сфере из одной точки, когда сфера касается нескольких прямых, имеющих общую точку.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: теорема о трёх перпендикулярах.

Новые математические понятия и свойства: касание сферы с прямой; свойство касательных, проведённых к сфере из одной точки.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Как доказать, что прямая, имеющая со сферой единственную общую точку, является касательной к этой сфере?

Ответ. Если через точку касания провести плоскость, перпендикулярную к соответствующему радиусу, то сразу получим касательную плоскость, содержащую заданную прямую.

4.2. Как в пространстве провести из точки P перпендикуляр к прямой a?

Ответ. Первый способ. Выбрать на прямой a две точки — A и B и в треугольнике PAB построить высоту, проведённую из вершины P.

Второй способ. Найти перпендикулярную проекцию точки P на плоскость. Затем из проекции точки P на плоскость α провести перпендикуляр к прямой a и основание перпендикуляра соединить с точкой P. По теореме о трёх перпендикулярах полученный отрезок перпендикулярен прямой a.

4.3.* Где находится центр сферы, касающейся двух параллельных прямых?

Ответ. Нужно найти множество точек пространства, равноудалённых от данных прямых. Для этого в плоскости α, содержащей данные параллельные прямые a и b, проведём прямую m, точки которой равноудалены от прямых a и b, а затем построим плоскость β, которая проходит через прямую m и перпендикулярна плоскости α. Центры сфер, касающихся одновременно прямых a и b, являются точками плоскости β.

4.4.* Как доказать, что для правильной треугольной пирамиды с ребром основания длины a и боковым ребром длины m выполняется неравенство $3m^2 > a^2$?

Ответ. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды с ребром основания больше радиуса окружности, описанной вокруг основания, который равен $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Поэтому $m > \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $3m^2 > a^2$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.** Каким условиям должны удовлетворять рёбра треугольной пирамиды, чтобы существовала сфера, касающаяся всех её рёбер?

Указание. Необходимым и достаточным условием существования сферы, касающейся всех рёбер пирамиды $ABCD$, является выполнение равенств: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

5.** В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $AC = 2a$. Высота призмы равна $\frac{a}{2}$. Найдите радиус сферы, касающейся ребра B_1C_1 и граней AA_1B_1B, AA_1C_1C, ABC.

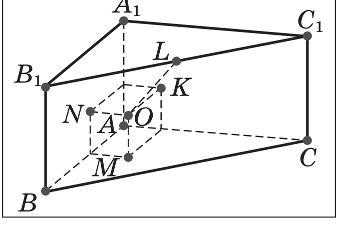


Рис. 1

Указание. Пусть O — центр сферы, M, N, K — точки касания сферы с указанными плоскостями, L — точка касания сферы с ребром B_1C_1 (рис. 1). Обозначив радиус сферы через r, находим

$$B_1N = \sqrt{(a - r)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2},$$

$$C_1K = \sqrt{(2a-r)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2}.$$

Далее, $B_1L = B_1N$, как отрезки касательных, проведённых к сфере из точки B_1, и аналогично $C_1L = C_1K$. Следовательно, $B_1N + C_1K = B_1C_1$, а так как $B_1C_1 = a\sqrt{5}$, то приходим к уравнению

$$\sqrt{(a-r)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2} + \sqrt{(2a-r)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2} = a\sqrt{5}.$$

Решив это уравнение, получим $r = \dfrac{7}{18}a$.

6.** Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = a$, $\angle BAC = 120°$. Ребро SA перпендикулярно основанию и равно a. Найдите радиус сферы, касающейся основания и боковых рёбер пирамиды.

Указание. Прежде всего, центр O сферы находится в плоскости, проходящей через S, A и середину P ребра BC. Далее, отметив точки N, L, K касания сферы с указанными рёбрами и точку M касания с плоскостью ABC (рис. 2), получим $AM = AN$, $SK = SL = SN$, $CM = CK$, $BM = BL$, как отрезки касательных, проведённых к сфере. Из условия перпендикулярности ребра SA к плоскости ABC следует, что если обозначить OM через r, то $AM = AN = r$. Тогда $SN = a - r$, $BL = a\sqrt{2} - a + r = BM$, и по теореме косинусов из треугольника ABM получим $(a\sqrt{2} - 1) + r)^2 = a^2 + r^2 - ar$, откуда $r = \dfrac{2a(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1}$.

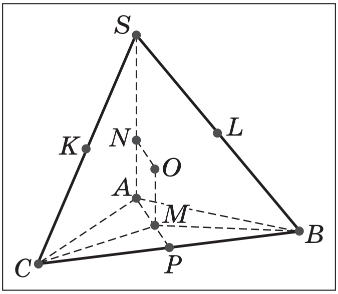


Рис. 2

7.** В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны прямой BC и образуют угол в $60°$ с плоскостью основания. Известно, что существует сфера, которая касается всех боковых рёбер и рёбер A_1C_1, A_1B_1, BC. Найдите высоту призмы.

Указание. Пусть P — середина ребра BC. Из условия следует, что угол A_1AP равен либо $60°$, либо $120°$.

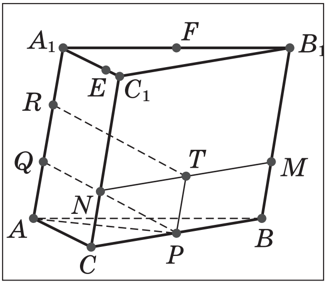


Рис. 3

Рассмотрим случай, когда $\angle A_1AP = 60°$. Обозначим точки касания сферы с указанными рёбрами так, как изображено на рис. 3, и длину отрезка A_1K через x. По свойству касательных, проведённых к сфере из одной точки, находим $CN = CP = \frac{a}{2}$, $BM = BP = \frac{a}{2}$, $A_1E = A_1F = A_1R = x$, $C_1E = a - x = C_1N$, откуда $CC_1 = \frac{3}{2}a - x = AA_1$, $AR = AA_1 - x = \frac{3}{2}a - 2x$. Если проведём $PQ \perp AA_1$, то $RQ = PT = \frac{a}{2}$ и $AQ = a - 2x$, но из условия $\angle PAQ = 60°$ получаем $PQ = AP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a$, $AQ = PQ \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Следовательно, $a - 2x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, откуда $x = \frac{a(4-\sqrt{3})}{8}$, $AA_1 = \frac{a(8+\sqrt{3})}{8}$, и высота призмы равна $\frac{a(3+8\sqrt{3})}{16}$.

Во втором случае высота призмы равна $\frac{a(8\sqrt{3}-3)}{16}$.

8.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $AD = \sqrt{6}$. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Сфера, центр которой находится вне пирамиды, касается отрезков SB, SC и плоскостей SAD и $ABCD$. Найдите радиус сферы.

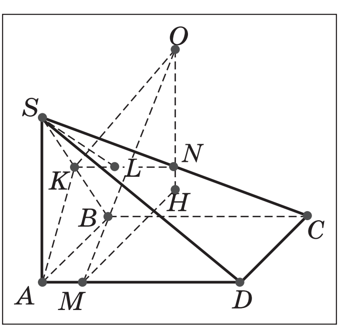


Рис. 4

Указание. Из условия следует, что если K — середина ребра SB, то $AK \perp SBC$. Далее, проведём $KN || BC$, затем биссектрису SL угла BSC и через точку L прямую ML параллельно AK (рис. 4). Тогда центр O искомой сферы находится на продолжении отрезка ML. Если построим $OH \perp ABCD$, то получим радиус сферы, проведённый в точку касания с плоскостью основания. Далее, так как $OL \perp SBC$ и $LK \perp SB$, то $OK \perp SB$, а поэтому отрезок OK также является радиусом сферы. Вычислив $ML = AK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $KL = \frac{1}{3}KN = \frac{\sqrt{6}}{6}$ и обозначив радиус сферы через R, получим $OM = R\sqrt{2}$, $OL = R\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, и по теореме Пифагора $OK^2 = KL^2 + OL^2$, откуда $R^2 = \frac{1}{6} + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Выбирая наибольший из корней этого уравнения, получим ответ: $R = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC длины всех рёбер равны 1. Точки M и N — середины рёбер A_1C_1 и CC_1 соответственно. Найдите минимально возможный радиус сферы, касающейся плоскостей граней AA_1B_1B, ABC и прямой MN.

Указание. Прежде всего отметим следующую общую закономерность. Если сферы касаются двух плоскостей α и β и прямой l, то среди них наименьший радиус имеет та сфера, которая касается боковых граней призмы, условно изображённой на рис. 5. Поэтому радиус такой сферы можно вычислить как радиус окружности, вписанной в треугольник, который получается при пересечении указанной призмы плоскостью, перпендикулярной боковым рёбрам.

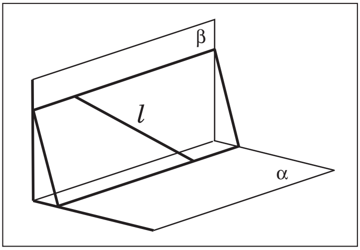


Рис. 5

Применим эту закономерность к данной задаче. Сначала выберем середину H ребра AB и построим плоскость CC_1PH, перпендикулярную AB, и найдём точку L пересечения MK с плоскостью CC_1PH. Проведя прямую LN, получим треугольник EFH (рис. 6), который и является нужным перпендикулярным сечением. Вычисляя длины сторон этого треугольника, находим $HF = \frac{3}{2}$,

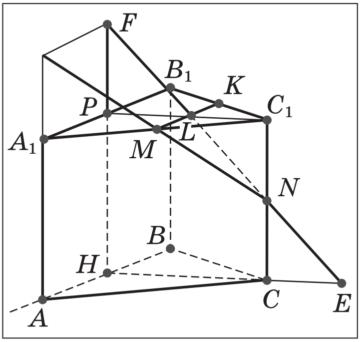


Рис. 6

$HE = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $EF = \frac{3\sqrt{7}}{4}$. После этого вычислим радиус вписанной в треугольник EFH окружности: $r = \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} : \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{4}\right) = = \frac{3\sqrt{3}}{2(2+3\sqrt{3}+\sqrt{7})}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. Из точки A проведена прямая, касающаяся сферы радиуса 5 в точке B. Известно, что $AB = 12$. Чему равно наименьшее из расстояний от точки A до точек этой сферы?

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

Указание. Расстояние от точки A до центра сферы равно 13.

1.2.* Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 1. Чему равен радиус наименьшей сферы, которая может одновременно касаться прямых AB и C_1B_1?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Указание. Диаметр этой сферы равен расстоянию между прямыми AB и C_1B_1.

1.3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ рёбра основания ABC равны 4, боковые рёбра равны 7. Проводится сфера, которая касается всех рёбер пирамиды. Пусть M — точка касания этой сферы с ребром SA. Чему равна длина отрезка SM?

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

Указание. Точка касания находится на расстоянии 2 от точки A.

2.1.** В пирамиде $ABCD$ рёбра AB, AC, DB, DC равны 8. В каких случаях из указанных существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды?

1) $BC = 6$, $AD = 9$ 2) $BC = 7$, $AD = 9$
3) $BC = 5$, $AD = 10$ 4) $BC = 5$, $AD = 11$

Указание. Должно выполняться условие $AD + BC = 16$.

2.2.* Сфера с центром O касается в точках A и B параллельных прямых m и n, лежащих в плоскости α, и центр сферы не лежит в плоскости α. Какие из утверждений являются верными?

1) прямые AB и m перпендикулярны

2) плоскость OAB перпендикулярна плоскости α

3) отрезок, соединяющий середину AB с центром O, перпендикулярен плоскости α

4) отрезок OA перпендикулярен плоскости α

Указание. Плоскость OAB перпендикулярна плоскости α и $OA = OB$.

2.3.* Если для треугольной призмы существует сфера, которая касается всех рёбер этой призмы, то:

1) основания призмы — правильные треугольники

2) в призму можно вписать сферу

3) боковые грани призмы — квадраты

4) вокруг призмы можно описать сферу

Указание. Условию теста удовлетворяют только правильные треугольные призмы, у которых все рёбра равны.

Глава 3
ПРОИЗВОДНАЯ

Цель главы — изучить понятие производной и основные правила вычисления производных.

Особенности главы. В основном содержание главы рассчитано на выработку технических навыков вычисления производных, так как различные применения производной рассматриваются позже. На основе ранее изученного материала в данной главе возможно практически только одно из применений производной — составление уравнений касательных к графикам функций, что и содержится среди предлагаемых задач.

Многие результаты в этой главе приводятся без доказательства. Дело в том, что на школьном уровне можно рассмотреть только простейшие доказательства, а остальное, как правило, сложно и изучается в курсах высшей математики. На это обстоятельство следует обратить внимание учащихся.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными свойства пределов функций и понятие касательной к графику функции.

§ 1. ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Цель параграфа — изучить определение производной.

Особенности параграфа. Термин «производное число» употребляется здесь для того, чтобы отличить предел соответствующего разностного отношения в фиксированной точке от производной как функции переменной точки, в которой производится дифференцирование. Производная функция возникает как функция, принимающая в данной точке значение, равное соответствующему производному числу. О производном числе говорится в тех случаях, когда речь идёт о фиксированной точке.

Перед изучением параграфа целесообразно вспомнить геометрическое определение касательной к графику функции и на основе этого переходить к определению производной. Важно отметить, что производное число (производная в точке) существует не всегда, для чего в параграфе приводится пример, рассчитанный на второй уровень. На третьем уровне в пункте 1.2 рассматривается доказательство того, что из существования касательной к графику функции следует существование производного числа, равного угловому коэффициенту касательной в соответствующей точке.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: касательная к графику функции; предел функции и его основные свойства.

Новые математические понятия: производное число функции в точке; приращение аргумента; приращение функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какое уравнение имеет касательная к параболе $y = x^2$, проходящая через точку $(-2; 4)$?

Ответ. $y - 4 = k(x + 2)$, где $k = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2} = -4$, то есть $y = 4x - 4$.

1.2.** Почему касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $(-2; 4)$ является прямая с уравнением $y = -4(x + 1)$?

Ответ. Фактически ответ на поставленный вопрос уже приведён в предыдущем пункте. Здесь можно ещё раз сослаться на утверждение 2 теоремы из пункта 1.1: прямая $y = -4(x + 1)$ проходит через точку $(-2; 4)$, подчеркнув, что угловой коэффициент этой прямой равен пределу разностного отношения $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-(-2)} = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ для функции $y = x^2$ в точке $x = -2$.

1.3. Какую мгновенную скорость будет иметь тело через 5 секунд после начала движения, если закон движения задаётся формулой $S(t) = S_0 + vt + \dfrac{at^2}{2}$, где время t измеряется в секундах, $S_0 = 8$ м, $v = -4$ м/с, $a = 10$ м/с^2?

Ответ. Мгновенная скорость через 5 секунд после начала движения будет равна $\lim\limits_{t\to 5}\dfrac{S(t)-S(5)}{t-5} = \lim\limits_{t\to 5}\dfrac{-4(t-5)+5(t^2-5^2)}{t-5} =$ $= 46$ (м/с).

1.4. Чему равно производное число функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке $x_0=4$?

Ответ. В данном случае $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

1.5.* Имеет ли функция $f(x)=x^2-2|x|$ производную в точке $a=-1$?

Ответ. Имеет, так как при $|\Delta x|<1$ приращение аргумента равно $(a+\Delta x)-a=(-1+\Delta x)-(-1)=\Delta x$, приращение функции $\Delta f=f(-1+\Delta x)-f(-1)=(-1+\Delta x)^2+2(-1+\Delta x)=(\Delta x)^2$, а поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=0$.

Указания к решению наиболее трудных задач

2. В какой точке касательная к графику функции $y=x^2$ параллельна прямой $y=x$?

Указание. Обозначим неизвестную абсциссу точки касания через a. Тогда угловой коэффициент касательной равен

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2a\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2a.$$

Из условия параллельности получаем $2a=1$, откуда $a=\dfrac{1}{2}$.

4.* В какой точке приращение функции $y=x^4$ положительно при любом приращении аргумента Δx?

Указание. В искомой точке x_0 данная функция должна принимать наименьшее значение, иначе найдётся такое число x, что $f(x)<f(x_0)$. Положив $\Delta x=x-x_0$, получим

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)<0.$$

8.** Найдите, под какими углами график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс, то есть какие углы с осью абсцисс образуют касательные к графику, проведённые в точках пересечения графика с осью абсцисс:

а) $f(x)=x^2-1$; б) $f(x)=\sqrt{x}-1$; в) $f(x)=x^3+1$.

Указание. Угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла φ между положительным направлением оси абсцисс и этой касательной, причём угол φ откладывается в положительном направлении, то есть против хода часовой стрелки. Отсюда получаем:

а) $\mathrm{tg}\varphi_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$, $\varphi_1 = \mathrm{arctg}2$;

$\mathrm{tg}\varphi_2 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = -2, \varphi_2 = \pi - \mathrm{arctg}2$;

б) $\mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}$;

в) $\mathrm{tg}\varphi = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = 3$, $\varphi = \mathrm{arctg}3$.

10.** Покажите, что если $S(x)$ есть площадь круга радиуса x, то $S'(x)$ равняется длине окружности радиуса x.

Указание. Так как $S(x) = \pi x^2$, то $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \pi\dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2\pi x$.

11.** Пусть $V(x)$ есть объём шара радиуса x. Покажите, что $V'(x)$ равняется площади поверхности этого шара.

Указание. Так как $V(x) = \dfrac{4\pi}{3}x^3$, то

$$V'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4\pi\,(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 4\pi x^2.$$

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. В какой точке приращение функции $y = x^2$ положительно при любом приращении аргумента Dx?

1) -3 2) 0 3) 1 4) 2

Указание. Приращение данной функции в точке a равно $(2a + \Delta x) \cdot \Delta$.

1.3.* Какая из указанных функций $f(x)$ имеет касательную к графику в точке $x = 0$?

1) $f(x) = |x|$ 2) $f(x) = \sqrt{|x|}$ 3) $f(x) = x \cdot |x|$ 4) $f(x) = -|x|$

Указание. В варианте 3 получим $f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\Delta x| \cdot \Delta x}{\Delta x} = 0$.

2.1.* Для каких функций для каждого значения x существует производное число этой функции?

1) $f(x) = x \cdot |x|$ 2) $f(x) = |x|$

3) $f(x) = (x-1) \cdot |x|$ 4) $f(x) = (x-1) \cdot |x-1|$

Указание. Функция из варианта 1 встречается в тесте 1.3, из неё линейной заменой переменной получается функция из варианта 4.

2.4. Какие из указанных функций не имеют производного числа в нуле?

1) $y=\sqrt[3]{|x|}$ 2) $y=\sqrt[3]{x^2}$ 3) $y=\sqrt[3]{x^4}$ 4) $y=\sqrt[3]{|x^5|}$

Указание. В каждом из вариантов составить отношение приращения функции к приращению аргумента и воспользоваться тем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{x}=0$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Цель параграфа — изучить таблицу производных основных функций и правила вычисления производной суммы, произведения, частного двух функций и произведения функции на число.

Особенности параграфа. Помещённая в начале параграфа таблица производных является основой для решения всех последующих задач. Поэтому следует затратить определённое время на то, чтобы учащиеся запомнили результаты этой таблицы. Особое внимание следует уделить производной от общей степенной функции, так как с её помощью решается много задач. Например, вычисляются производные от функций $f(x)=\sqrt[3]{x^{12}}$, $g(x)=\sqrt[4]{x\sqrt{x}}$, $h(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ и т.д.

Основная часть параграфа посвящена изучению правил вычисления производной суммы, произведения, частного двух функций и произведения функции на число. Из них учащиеся должны уметь доказывать правила вычисления производной суммы двух функций и произведения функции на число, что непосредственно основывается на определении производной. Остальные правила формулируются без доказательства. Полезно отметить, что правило дифференцирования произведения функции на число можно вывести из общего правила дифференцирования произведения двух функций. На третьем уровне рассматривается доказательство непрерывности функции в точке, в которой функция дифференцируема, и приводится формула линейного приближения.

Новые математические понятия: производная функция от данной функции; таблица производных от основных элементарных функций; правила дифференцирования суммы, произведения, частного двух функций.

Вспомогательные понятия: число Эйлера e.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. На каком множестве действительных чисел существует производная функции $f(x) = x \cdot |x|$?

Ответ. Непосредственно из определения вытекает, что производная данной функции существует в любой точке. Некоторые сомнения может вызвать точка $x = 0$, но и здесь всё в порядке: $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0.$

2.2. Как доказать, что $(x^3)' = 3x^2$?

Ответ.

$(x^3)\ (a)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(a + \Delta x)^3 - a^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3a^2 \cdot \Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2) = 3a^2$. Этот результат условно записывают в виде $(x^3)' = 3x^2$.

2.3. Как показать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что существуют производные для функций $f(x)$ и $f(x) + g(x)$, то существует производная функции $g(x)$?

Ответ. Нетрудно проверить, что если функция $f(x)$ имеет производную, то противоположная функция $-f(x)$ также её имеет. Теперь нужный результат сразу получается из правила дифференцирования суммы и представления $g(x) = (f(x) + g(x)) + (-f(x))$.

2.4. Как показать, что если на множестве M существует производная $f'(x)$ функции $f(x)$, то на M существует производная $g'(x)$ функции $g(x) = x \cdot f(x)$ и выполняется равенство $g'(x) = x \cdot f'(x) + f(x)$?

Ответ. По определению для каждого $x \in M$ имеем

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) \cdot f(x + \Delta x) - x \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] + \Delta x \cdot f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) = x \cdot f'(x) + f(x).$$

2.5.** Какой из рассмотренных ранее примеров показывает, что функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в этой точке производного числа?

Ответ. Например, функция $f(x)=|x|$ непрерывна в нуле, но не имеет производной в этой точке.

2.6. По какой формуле находится производная функции вида $\frac{1}{f(x)}$?

Ответ. Можно представить эту функцию в виде частного $\frac{u(x)}{v(x)}$, где $u(x)=1$, $v(x)=f(x)$, и применить правило вычисления производной частного: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

2.** Найдите, в каких точках непрерывна функция

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ если } x \text{ рационально},\\ -x, \text{ если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Имеет ли эта функция производную в какой-либо точке?

Указание. 1. Эта функция непрерывна в нуле. Действительно, пусть (x_n) произвольная последовательность такая, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $|x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $|f(x_n)-f(0)|=|f(x_n)|=|x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(0)$.

2. Эта функция разрывна в каждой точке, отличной от нуля. Поясним доказательство на примере. Пусть $a=\sqrt{2}$. Существует последовательность (x_n) рациональных чисел такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$. Например, такова последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ с недостатком. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}$. Далее, существует последовательность (y_n) иррациональных чисел такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} y_n=\sqrt{2}$. Например, такой последовательностью является $y_n = x_n + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-y_n)=-\sqrt{2}$.

3. Эта функция ни в одной точке не имеет производной.

При $a \ne 0$ отсутствие производной функции $f(x)$ в точке a следует из теоремы п. 2.5.**

При $a = 0$ рассмотрим последовательности (x_n) и (y_n), приведённые выше в пункте 2. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_n} = 1$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-y_n)}{y_n} = -1$.

5.* Найдите производную функции, заданной выражением:

а) $\sin^2 x$; б) $(\ln x)^{-1}$; в) $\cos 2x$; г) $\ln 3x$.

Указание

а) $(\sin^2 x)' = (\sin x \cdot \sin x)' = (\sin x)' \cdot \sin x + \sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x$.

б) $((\ln x)^{-1})' = \left(\dfrac{1}{\ln x}\right)' = \dfrac{(1)' \cdot \ln x - 1 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \dfrac{0 \cdot \ln x - 1 \cdot (x^{-1})}{\ln^2 x} = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$.

в) $(\cos 2x)' = (1 - 2\sin^2 x)' = 1' - 2 \cdot (\sin^2 x)' = 0 - 2 \cdot 2\sin x \cos x = - 2\sin 2x$

г) $(\ln 3x)' = (\ln 3 + \ln x)' = (c + \ln x)' = c' + (\ln x)' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$, где в этом рассуждении $c = \ln 3$ есть постоянная.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Какую производную имеет функция $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$?

1) $\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x}}$ 2) $\dfrac{1}{5\sqrt[6]{x^5}}$ 3) $\dfrac{1}{5\sqrt[6]{x}}$ 4) $\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

Указание. $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{6}}$.

1.4. Чему равна производная функции вида $\dfrac{1}{f(x)}$?

1) $\dfrac{1}{f'(x)}$ 2) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 3) $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ 4) $\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$

Указание. Воспользоваться формулой производной отношения функций.

2.4. Какие из производных вычислены верно?

1) $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{1}{\cos x}$ 2) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\sin x}$ 4) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Указание. Вариант 2 содержится в таблице производных, в остальных случаях вычислить производные и сравнить с функциями, приведёнными в вариантах.

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Цель параграфа — изучить правило вычисления производной сложной функции.

Особенности параграфа. Изучить правило вычисления производной сложной функции и научиться применять его при решении задач непросто. Поэтому вначале целесообразно представлять решение каждой задачи в виде нескольких последовательно расписанных действий. Проиллюстрируем это на примерах.

1. Пусть требуется вычислить производную функции $\sin\sqrt{x}$ в точке $a = \frac{\pi^2}{9}$. Прежде всего представим эту функцию в виде $f(g(x))$, где $g(x) = \sqrt{x}$ и $f(z) = \sin z$. Далее выясним, что можем вычислить $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $f'(z) = \cos z$. Затем найдём, что при $a = \frac{\pi^2}{9}$ число $b = g(a) = \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3}$. После этого применим правило:

$$(\sin\sqrt{x})'(a) = \cos b \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{4\pi}.$$

2. Пусть требуется вычислить производную функции $\sqrt{1 + x^2}$ в точке a. Прежде всего представим эту функцию в виде $f(g(x))$, где $g(x) = 1 + x^2$ и $f(z) = \sqrt{z}$. Далее выясним, чему равны производные указанных функций: $g'(x) = 2x$ и $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. Затем найдём,что $b = g(a) = 1 + a^2$. После этого применим правило:

$$(\sqrt{1 + x^2})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{b}} \cdot (2a) = \frac{a}{2\sqrt{1 + a^2}} \cdot (2a) = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Аналогичные действия можно выполнять до тех пор, пока правило дифференцирования сложной функции не начнёт применяться вполне уверенно. После этого можно перейти к сокращённой записи действий, как в последнем пункте параграфа.

Новые математические понятия: правило дифференцирования сложной функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. По какому правилу можно вычислить производную функции $f(g(\varphi(x)))$ в точке a, используя производные функций $f(t)$, $g(z)$, $\varphi(x)$?

Ответ. Обозначив $g(\varphi(x))$ через $h(x)$, по правилу вычисления производной сложной функции имеем $h'(a) = g'(b) \cdot \varphi'(a)$, где $b = \varphi(a)$. Далее, по тому же правилу $f(g(\varphi(x)))'(a) = (f(h(x)))'(a) = f'(c)\cdot g'(b)\cdot \varphi'(a)$, где $c = h(a) = g(\varphi(a))$.

3.2.** Как в приведённом доказательстве использовалось свойство монотонности функции $g(x)$?

Ответ. В этом случае $g(x) - g(a) \neq 0$ при $x \neq a$, и поэтому возможно деление на $g(x) - g(a)$, что и использовалось в приведённом доказательстве.

3.3. Как из равенства $(e^x)' = e^x$ вывести, что $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$?

Ответ. $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = (e^z)'_z(x\ln a)(x\ln a)' = e^{x\ \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.

Указания к решению наиболее трудных задач

2.* Существует ли такое значение переменной x, что значение производной от функции $f(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{x}$ совпадает со значением функции $g(x) = \cos^2 x$?

Указание. Таких значений бесконечно много. В самом деле, вычислим производную функции $f(x)$ в её естественной области определения, то есть при $x \neq 0$. По правилу дифференцирования отношения находим $f'(x) = -\dfrac{\sin^2 x - 2x\sin x\cos x}{x^2}$. Составим теперь уравнение $f'(x) = \cos^2 x$, которое при $\cos x \neq 0$ легко приводится к виду $\operatorname{tg}^2 x - 2x\operatorname{tg} x - x^2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = x(1 \pm \sqrt{2})$. Последнее равенство выполняется для бесконечного множества значений x. Это нетрудно проиллюстрировать на графике.

5.** Предполагая существование производной и пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, найдите производную функции:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$.

Указание. а) Для каждого $x \in [-1;1]$ имеем $x = \sin(\arcsin x)$. Поэтому $(x)'(a) = 1 = \sin'(b)\cdot(\arcsin x)'(a) = (\cos b)\cdot(\arcsin x)'(a)$, где $b = \arcsin a$. Отсюда $(\arcsin x)'(a) = \dfrac{1}{\cos b} = \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$.

б) Рассуждения аналогичны тем, которые приведены в пункте а).

в) Для каждого $x \in R$ имеем $x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$. Поэтому $(x)'(a) = 1 = \operatorname{tg}'(b)\cdot(\operatorname{arctg} x)'(a) = \dfrac{1}{\cos^2 b}\cdot(\operatorname{arctg} x)'(a) = (1 + \operatorname{tg}^2 b)\cdot(\operatorname{arctg} x)'(a)$, где $b = \operatorname{arctg} a$. Отсюда $(\operatorname{arctg} x)'(a) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 b} = \dfrac{1}{1+a^2}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Чему равна производная функции вида $\ln f(x)$?

1) $f'(x)+f(x)$ 2) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 3) $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ 4) $f'(x)\cdot f(x)$

Указание. Использовать правило вычисления производной сложной функции.

1.4. Чему равняется $\ln(x^x)$?

1) $x+\ln x+1$ 2) $x\cdot\ln x$ 3) $\frac{\ln x}{x}$ 4) $\frac{x}{\ln x}$

Указание. Решение значительно упрощается, если использовать равенство $\ln(x^x)=x\ln x$.

2.1. Какое из выражений является производной функции $y=\frac{f(\sin x)}{x}$?

1) $\frac{xf'(\sin x)-f(\sin x)}{x^2}$ 2) $\frac{\cos x\cdot f'(\sin x)-f(\sin x)}{x^2}$

3) $\frac{x\cos x\cdot f'(\sin x)-f(\sin x)}{x^2}$ 4) $\frac{x\cos x\cdot f'(\sin x)+f(\sin x)}{x^2}$

Указание. Одновременно использовать два правила: вычисление производной отношения и производной сложной функции.

Глава 4
КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель главы — рассмотреть основные принципы изображения точек пространства с помощью ортогональных проекций на две перпендикулярные плоскости, прямоугольную систему координат в пространстве, параллельные переносы, связанные и свободные векторы, операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число, научиться представлять векторы пространства в виде линейной комбинации трёх некомпланарных векторов.

Особенности главы. Изучение в пространстве прямоугольной системы координат, параллельных переносов, связанных и свободных векторов, операций над векторами аналогично тому, как это делалось на плоскости. Поэтому работу над данным материалом частично можно считать повторением изученного ранее. С другой стороны, новым является увеличение размерности. Это приводит к тому, что дополнительно появляются понятия компланарности и некомпланарности векторов, а для представления векторов в виде линейных комбинаций требуются уже не два, а три вектора, через которые можно выразить любой вектор пространства.

Введению прямоугольной системы координат предшествует знакомство с начальными понятиями начертательной геометрии, которая имеет большое практическое значение.

§ 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИЙ

Цель параграфа — рассмотреть основные принципы изучения взаимного расположения точек и прямых в пространстве с помощью ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости.

Особенности параграфа. Изучение пространственных фигур по изображениям их проекций является непростым делом и требует осознанного восприятия правил, которые позволяют по изображениям проекций представлять реальное положение фигур в пространстве. Это требует также тренировки в виде решения значительного количества задач, пусть и не сложных.

Параграф посвящён начальному знакомству с основными видами задач, решаемых по эпюру — изображению ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости. Учитывая практическую направленность данного материала, на первом уровне рассматриваются принципы построения проекций точек, на втором уровне рассматриваются задачи на вычисление расстояний между точками, на определение взаимного расположения точек и прямых, на определение расположения многоугольника в пространстве по его изображениям на эпюре.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: свойства параллельного проектирования на плоскость; свойства перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Новые математические понятия: эпюр; горизонтальная проекция; вертикальная проекция; ось проекций.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какие проекции на плоскости α и β имеет точка плоскости α?

Ответ. Одна из проекций — это сама точка, другая проекция — это основание перпендикуляра, проведённого из данной точки к прямой пересечения плоскостей α и β.

1.2.* Пусть точка A не лежит ни в одной из плоскостей α и β. Как доказать, что точка A и её проекции на плоскости α и β лежат в плоскости, перпендикулярной прямой l пересечения плоскостей α и β?

Ответ. Пусть прямая m — пересечение плоскостей α и β, отрезки AK и AL — перпендикуляры, проведённые из точки A к плоскостям α и β соответственно, причём точки K и L не совпадают. Тогда $AK \perp m$, так как прямая m лежит в плоскости α, и $AL \perp m$, так как прямая m лежит в плоскости β. Поэтому $AKL \perp m$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

1.3. Как в пространстве расположена точка, если обе её проекции совпадают?

Ответ. В этом случае точка лежит на прямой пересечения плоскостей проекций.

1.4. На эпюре одной из проекций отрезка является точка. Как по эпюру найти длину этого отрезка?

Ответ. Измерить длину второй проекции, и это значение будет длиной самого отрезка.

1.5. Как по изображениям двух отрезков определить, пересекаются ли прямые, проходящие через эти отрезки, или нет?

Ответ. Нужно в каждой из проекций рассмотреть прямые, содержащие изображения отрезков, и найти соответствующие точки пересечения прямых. Если отрезок, соединяющий две получившиеся точки пересечения, перпендикулярен оси проекций, то заданные прямые в пространстве пересекаются, если не перпендикулярен, то не пересекаются.

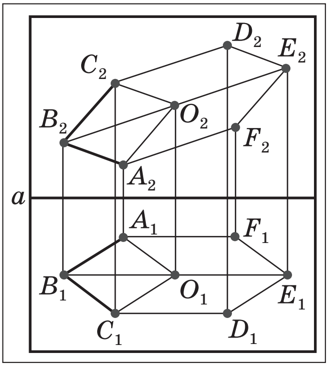


Рис. 1

1.6. Как по изображениям на эпюре трёх соседних вершин правильного шестиугольника построить изображение всего шестиугольника?

Ответ. Пусть A_1, B_1, C_1 — горизонтальные проекции, A_2, B_2, C_2 — вертикальные проекции соседних вершин правильного шестиугольника (рис. 1). Сначала можно построить параллелограммы $A_1B_1C_1O_1$ и $A_2B_2C_2O_2$, а затем, когда получены точки O_1 и O_2, построить ещё по два параллелограмма так, как указано на рис. 1.

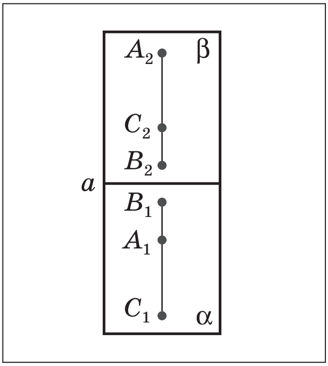


Рис. 2

1.7.* На рис. 2 отмечены вертикальные и горизонтальные проекции вершин треугольника *ABC*. Как в пространстве расположен треугольник *ABC*?

Ответ. Положение треугольника *ABC* по отношению к плоскостям проекций схематически изображено на

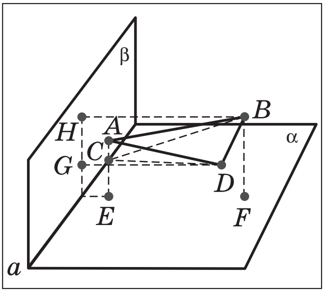


Рис. 3

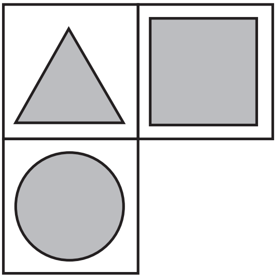


Рис. 4

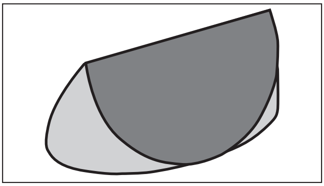


Рис. 5

рис. 3. Треугольник находится в плоскости, перпендикулярной прямой пересечения плоскостей проекций.

1.8.* Какой вид на эпюре имеют проекции цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости горизонтальных проекций?

Ответ. Горизонтальной проекцией цилиндра будет круг, вертикальной проекцией — прямоугольник.

1.9.* Какой вид может иметь пространственная фигура, у которой на рис. 4 изображены проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости?

Ответ. Примерный вид одной из таких фигур изображён на рис. 5. Берём цилиндр и «обрубаем» двумя парами плоскостей.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.* Пусть проекциями отрезка AB на горизонтальную и вертикальную плоскости являются отрезки A_1B_1 и A_2, B_2, причём длина и того и другого отрезка равна 4. Чему может быть равна длина отрезка AB?

Указание. Можно получить только следующий результат: в зависимости от положения отрезка AB его длина может быть от 4 до $4\sqrt{2}$.

4.** Известно, что проекциями фигуры Φ на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций являются отрезки A_1B_1 и A_2B_2, не перпендикулярные линии пересечения плоскостей проекций. Докажите, что Φ тоже отрезок.

Указание. Фигура Φ расположена в пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через точки A_1, B_1, другая проходит через точки A_2, B_2 и которые перпендикулярны соответствующим плоскостям проекций.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — проекции отрезка AB на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций. Точка E — пересечение плоскости A_1AA_2 с осью проекций, точка F — пересечение плоскости B_1BB_2 с осью проекций. Чему равна длина отрезка AB, если $A_2E = 1$, $B_2F = 5$, $A_1E = 2$, $B_1F = 4$, $EF = 4$?

1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

Указание. Точки E, F, A_1, B_1 являются вершинами прямоугольной трапеции, точки A, B, A_1, B_1 также являются вершинами прямоугольной трапеции.

1.4. Пусть проекцией отрезка AB на горизонтальную и вертикальную плоскости являются отрезки A_1B_1 и A_2B_2, причём длина и того и другого отрезка равна 4. Какой может быть наибольшая длина отрезка AB?

1) $|AB| = 4$ 2) $|AB| = 4\sqrt{2}$

3) $|AB| = 2\sqrt{3}$ 4) $|AB| = 4\sqrt{3}$

Указание. Длина отрезка наибольшая, когда обе проекции перпендикулярны прямой пересечения плоскостей проекций.

2.1. Два луча, угол между которыми равен $60°$, проектируются перпендикулярно на плоскость. Какой может быть величина угла между проекциями этих лучей?

1) $15°$ 2) $30°$ 3) $120°$ 4) $150°$

Указание. Величина угла может быть любой из промежутка $(0°; 180°)$.

2.2. Какие многоугольники могут получаться при перпендикулярном проектировании куба на плоскость?

1) треугольник 2) четырёхугольник

3) пятиугольник 4) шестиугольник

Указание. Проекциями могут быть только многоугольники, имеющие центр симметрии.

2.3. Какой вид на эпюре может иметь изображение квадрата?

1) два параллелограмма

2) прямоугольник и параллелограмм

3) два прямоугольника

4) прямоугольник и точка

Указание. При ортогональном проектировании квадрата на плоскость прямоугольник может получиться только тогда, когда две стороны квадрата параллельны плоскости проекций.

2.4. Пусть отрезок длины c изображается на эпюре отрезками, длины которых a и b. Какие из соотношений всегда являются верными?

1) $c = a + b$ 2) $c \leq a$ 3) $b \leq c$ 4) $c \leq a + b$

Указание. Прежде всего, длина ортогональной проекции на плоскость всегда не больше длины заданного отрезка. Далее, при фиксированных ненулевых a и b длина заданного отрезка наибольшая, когда отрезок перпендикулярен оси проекций, и в этом случае $c < a + b$, в силу неравенства треугольника.

§ 2. КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель параграфа — основываясь на изучении прямоугольной системы координат на плоскости, ввести прямоугольную систему координат в пространстве, вывести формулы для вычисления расстояния между точками и вычисления координат середины отрезка по координатам заданных точек, напомнить определение и свойства параллельного переноса.

Особенности параграфа. Ввиду того что понятие прямоугольной системы координат несколько раз встречалось в предыдущих классах, работу с данным параграфом частично можно считать повторением изученного ранее.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: прямоугольная система координат на плоскости; параллельный перенос на координатной плоскости и его свойства.

Новые математические понятия: прямоугольная система координат в пространстве; абсцисса, ордината и аппликата точки координатного пространства.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Сколько различных систем координат с фиксированной единицей измерения длин можно задать, имея три данные пересекающиеся взаимно перпендикулярные прямые?

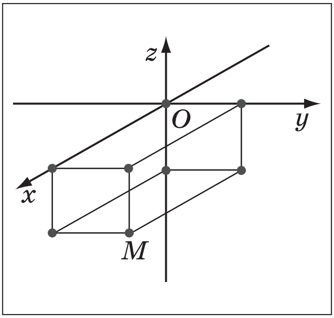
Ответ. При заданном упорядочении прямых, выбирая поразному положительные направления, можно определить 8 систем координат. Так как три прямые можно упорядочить шестью способами, то всего можно определить $6 \cdot 8 = 48$ различных систем координат.

2.2. Как доказать, что абсцисса точки M совпадает с точкой пересечения прямой Ox и прямой, проведённой через точку M перпендикулярно оси Ox?

Ответ. Указанная прямая m содержится в плоскости β, которая проходит через заданную точку и перпендикулярна оси Ox. Поэтому точка пересечения прямой m с осью Ox является точкой пересечения плоскости β с осью Ox.

2.3. Где расположена точка P, если две её координаты равны нулю?

Ответ. На какой-то из координатных осей.



2.4. Какие знаки имеют абсцисса и аппликата точки M (см. рис.)?

Ответ. Абсцисса точки M положительна, аппликата точки M отрицательна.

2.5. Каким уравнением в пространстве задаётся множество всех точек, удалённых от начала O на расстояние 1?

Ответ. Данное множество задаётся уравнением $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$. Так как обе части этого уравнения неотрицательны, то оно равносильно уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Последнюю запись называют уравнением сферы с центром O и радиусом 1.

2.6.** Чему равно расстояние от точки $A(a;\ b;\ c)$ до прямой Ox?

Ответ. Данное расстояние равно расстоянию от начала системы координат до проекции точки A на плоскость Oyz, то есть равно $\sqrt{y^2 + z^2}$.

2.7. Какие координаты имеет середина отрезка AB, если $A(-2; -3; -4)$, $B(5; -1; -2)$?

Ответ. По формулам из данного пункта получим $(1{,}5; -2; -3)$.

2.8.** Как доказать, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются либо вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой?

Ответ. Пусть вершины пространственного четырёхугольника $ABCD$ имеют координаты: $A\ (a_1; b_1; c_1)$, $B\ (a_2; b_2; c_2)$,

$C(a_3; b_3; c_3)$, $D(a_4; b_4; c_4)$. Обозначим через M, N, K, L середины сторон AB, DC, CD, AD соответственно. Тогда

$$M\left(\frac{a_1+a_2}{2};\ \frac{b_1+b_2}{2};\ \frac{c_1+c_2}{2}\right),\quad N\left(\frac{a_2+a_3}{2};\ \frac{b_2+b_3}{2};\ \frac{c_2+c_3}{2}\right),$$

$$K\left(\frac{a_3+a_4}{2};\ \frac{b_3+b_4}{2};\ \frac{c_3+c_4}{2}\right),\quad L\left(\frac{a_4+a_1}{2};\ \frac{b_4+b_1}{2};\ \frac{c_4+c_1}{2}\right).$$

По формулам из п. 2.7 середина E отрезка MK имеет координаты $\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2};\ \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{2};\ \frac{c_1+c_2+c_3+c_4}{2}\right)$, середина F отрезка NL имеет координаты

$$\left(\frac{a_2+a_3+a_4+a_1}{2};\ \frac{b_2+b_3+b_4+b_1}{2};\ \frac{c_2+c_3+c_4+c_1}{2}\right).$$

Поскольку соответственные координаты точек E и F равны, точки E и F совпадают. Отсюда следует, что если $MNKL$ — четырёхугольник, то середины его диагоналей совпадают, поэтому $MNKL$ — параллелограмм. Если какие-то три из точек — M, N, K лежат на одной прямой, то тогда и четвёртая точка также лежит на этой прямой.

2.9. В какую фигуру переходит плоскость при параллельном переносе?

Ответ. Поскольку параллельный перенос переводит каждую фигуру в равную ей фигуру, то плоскость переходит в равную ей фигуру, которая также плоскость.

Указания к решению наиболее трудных задач

1. г)* В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 известны координаты следующих вершин: $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 3)$, $D(0; 1; 3)$, $A_1(1; 1; 2)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

Указание. Из условия следует, что рёбра куба параллельны координатным осям. Поэтому абсциссы вершин куба могут принимать только одно из двух значений, и аналогично для ординат и аппликат вершин куба.

Аналогично решается задача 2.

13.** Правильный тетраэдр $SABC$ с ребром 1 расположен в пространстве так, что центр основания ABC совпадает с началом O координат, луч OS является положительным лучом оси Oz, ордината точки A равна нулю, абсцисса и ордината точки B отрицательны. Найдите:

а) координаты вершин тетраэдра;

б) координаты середины отрезка с концами в серединах рёбер SB и AC.

Указание. Высота основания этого тетраэдра равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, высота, проведённая к основанию, равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Учитывая, что центр основания делит каждую из высот основания в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника, получим, что

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.* Чему равно расстояние от точки $M(2; -1; 3)$ до прямой Oz?

1) $\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{5}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{10}$

Указание. Данное расстояние равно расстоянию от начала системы координат до проекции точки M на плоскость Oxy.

1.4.* Даны точки $A(5; 3; 1)$ и $C(4; -1; 3)$. В каком случае точка C является серединой отрезка AB?

1) $B(3; -5; 5)$ 2) $B(3; 2; 3)$
3) $B(6; 4; 3)$ 4) $B(6; -5; 3)$

Указание. В каждом из вариантов находить координаты середины отрезка AB.

2.1. Какие из указанных точек расположены от начала координат на расстоянии, не большем 6?

1) $(-2; 4; -3)$ 2) $(1; -5; 4)$
3) $(4; -2; -4)$ 4) $(-3; -4; 3)$

Указание. В каждом из вариантов сумму квадратов координат сравнить с числом 36.

2.2. При каких координатах точек A, B отрезок AB равен отрезку с концами $C(2; 0; -3)$ и $D(1; -1; -2)$?

1) $A(3; 5; -4)$, $B(2; 6; -3)$ 2) $A(-2; -4; 1)$, $B(-1; -5; 2)$
3) $A(5; -2; -4)$, $B(4; -1; -3)$ 4) $A(-4; 3; 2)$, $B(-5; 2; 3)$

Указание. Сравнить длины отрезков AB с длиной отрезка CD.

2.3.* В каких случаях середина отрезка AB расположена на оси ординат?

1) $A(5; -2; -4)$, $B(-4; 3; 5)$ 2) $A(-2; 7; 3)$, $B(-3; 1; 2)$
3) $A(5; -2; -4)$, $B(-5; 7; 4)$ 4) $A(-2; 7; 3)$, $B(2; -4; -3)$

Указание. Точки оси ординат имеют координаты вида $(0; t; 0)$.

2.4. Даны точки $A(1; 0; 0)$ и $B(1; 4; 0)$. В каких случаях точка C является вершиной равнобедренного треугольника с основанием AB?

1) $C(1; 2; 0)$ 2) $C(4; -1; 7)$ 3) $C(-3; 2; 6)$ 4) $C(5; 2; -4)$

Указание. Подходят все точки, у которых ордината равна 2.

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Цель параграфа — определить связанные векторы в пространстве, равенство векторов, связанных с разными точками, операции сложения и вычитания векторов.

Особенности параграфа. В пространстве связанный вектор определяется аналогично тому, как это делалось на плоскости. Затем вводится понятие координат вектора и с помощью координат определяется равенство векторов, рассматриваются два способа вычисления суммы векторов, определяется разность векторов, изучаются свойства сложения и вычитания векторов.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: сложение и вычитание векторов на плоскости.

Новые математические понятия: сумма векторов в пространстве; разность векторов в пространстве; свойства сложения и вычитания векторов в пространстве.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Как называется вектор на плоскости, у которого начало и конец совпадают?

Ответ. Нулевой вектор.

3.2. Что в координатном пространстве называют параллельным переносом, определяемым тройкой чисел $(a; b; c)$?

Ответ. Преобразование пространства, при котором произвольная точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку с координатами $(x + a; y + b; z + c)$.

3.3. Как доказать, что равенство двух векторов равносильно равенству их соответствующих координат?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $A(a_1; b_1; c_1)$, $B(a_2; b_2; c_2)$, $C(m_1; n_1; k_1)$, $D\ (m_2; n_2; k_2)$. Параллельный перенос, который переводит точку A в точку B, определяется тройкой чисел $(a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1)$.

Поэтому $m_2 = m_1 + (a_2 - a_1)$, $n_2 = n_1 + (b_2 - b_1)$, $k_2 = k_1 + (c_2 - c_1)$, откуда $m_2 - m_1 = a_2 - a_1$, $n_2 - n_1 = b_2 - b_1$, $k_2 - k_1 = c_2 - c_1$. Отсюда следует, что соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ равны.

Обратно, если $\overrightarrow{AB} = (p;\ q;\ r)$, $\overrightarrow{CD} = (p;\ q;\ r)$ и $A(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $C(m_1;\ n_1;\ k_1)$, то $B\ (a_1 + p;\ b_1 + q;\ c_1 + r)$, $D(m_1 + p;\ n_1 + q;\ k_1 + r)$. Отсюда следует, что параллельный перенос, определяемый тройкой чисел $(p;\ q;\ r)$, переводит точку A в точку B и точку C в точку D, а поэтому по определению $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3.4. Как найти сумму $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ на рис. 1?

Ответ. Построить параллелограмм *OCDB,* и тогда $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

3.5. Как находить сумму четырёх векторов по «правилу многоугольника»?

Ответ. Допустим, нужно найти сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Выберем некоторую точку A и последовательно построим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}, \overrightarrow{DE} = \vec{d}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AE}$.

3.6. Пусть векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ противоположны друг другу. Как геометрически связаны между собой точки O, A и B?

Ответ. Точка O является серединой отрезка AB.

3.7. Чему равна разность $\vec{a} - \vec{a}$?

Ответ. Эта разность равна нулевому вектору.

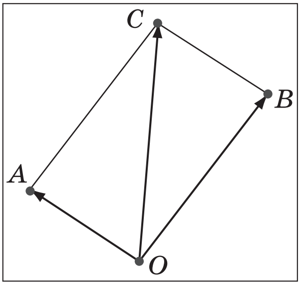


Рис. 1

3.8. Как доказать свойство $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Тогда $(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{AD} = a + (\vec{b} + \vec{c})$.

3.9. Как доказать, что $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ (рис. 2)?

Ответ. $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AD}$.

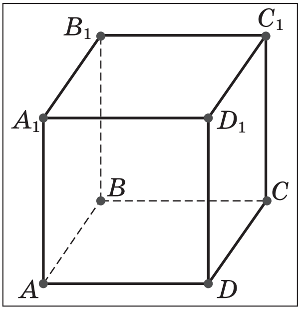


Рис. 2

Указания к решению наиболее трудных задач

6*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, N, K, L — середины рёбер AB, BC, CD, AD основания, точки E, F, G, H — середины боковых рёбер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, точки P, Q, R, S — середины рёбер $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1$ соответственно. Укажите вектор, равный вектору:

а) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{QG}$; б) $\overrightarrow{FR}+\overrightarrow{LP}$; в) $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{LF}$;

г) $\overrightarrow{B_1L}+\overrightarrow{KC_1}$; д) $\overrightarrow{B_1M}-\overrightarrow{D_1A}$; е) $\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{KN}$;

ё) $\overrightarrow{LR}-\overrightarrow{MD}$; ж) $\overrightarrow{CR}-\overrightarrow{MG}$.

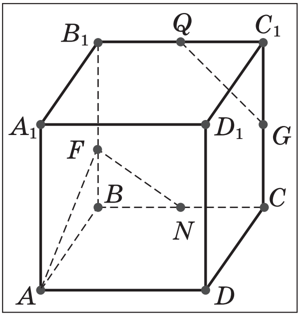


Рис. 3

Указание. а) Так как $\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{FN}$ (рис. 3), то $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{AN}$. Аналогично можно решить задачи из остальных пунктов.

7.* В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, точки M, N, K, L — середины рёбер AB, BC, CD, AD, точки E, F, G, H — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно. Укажите вектор, равный вектору:

а) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{MD}$; б) $\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{HF}$; в) $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{LG}$;

д) $\overrightarrow{FL}-\overrightarrow{GA}$; е) $\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{KC}$; ё) $\overrightarrow{FH}-\overrightarrow{SL}$; ж) $\overrightarrow{SF}-\overrightarrow{DE}$.

Указание. Смотрите указание к задаче 6*.

8. В трапеции $ABCD$ длина основания BC в три раза больше длины основания AD, O — точка пересечения диагоналей трапеции. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через:

а) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$;

б)** векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

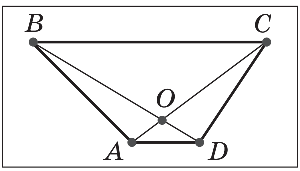


Рис. 4

Указание. а) Из подобия треугольников AOD и BOC следует, что $BO : BD = 3 : 4$ (рис. 4). Отсюда $\overrightarrow{BO}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BD}$, и тогда $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=$

$=1\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BD}$.

б)** Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, то $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, откуда $\overrightarrow{AO} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

9.* Медианы граней SAB и SAC тетраэдра $SABC$ пересекаются в точках M и N. Выразите векторы $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CS}$.

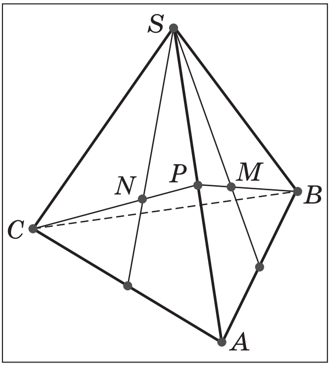


Рис. 5

Указание. Пусть P — середина ребра SA (рис. 5). Тогда $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CS}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS}$. Так как $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$, то $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + 0 \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS}$. Далее, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS}\right) + \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{CS}\right) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CS}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.1.* При каких координатах точки A отрезок AM, где $M(1; -0{,}5; 1{,}5)$, будет проходить через начало координат?

1) $(-4; 2; -6)$ 2) $(-6; 2; -9)$
3) $(-2; 1; -3)$ 4) $(-3; 2; -6)$

Указание. Если точка O — начало системы координат, то координаты вектора $\overrightarrow{AO}$ должны быть пропорциональны координатам вектора $\overrightarrow{OB}$ с положительным коэффициентом пропорциональности.

2.4. В каких случаях $\vec{m} - (\vec{n} - \vec{k})$ равняется нулевому вектору?

1) $\vec{m} = (1; 3; -2)$, $\vec{n} = (6; 1; 1)$, $\vec{k} = (5; -2; 3)$

2) $\vec{m} = (-2; 4; 1)$, $\vec{n} = (1; 5; 8)$, $\vec{k} = (3; 1; 7)$

3) $\vec{m} = (3; -1; 4)$, $\vec{n} = (5; -4; -1)$, $\vec{k} = (2; -3; -5)$

4) $\vec{m} = (-1; -3; -5)$, $\vec{n} = (3; 0; -7)$, $\vec{k} = (4; 3; -1)$

Указание. В каждом варианте сначала вычислить координаты вектора $\vec{n} - \vec{k}$.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ

Цель параграфа — в пространстве рассмотреть операцию умножения вектора на действительное число, ввести понятия компланарности и некомпланарности векторов, доказать основную теорему о разложении произвольного вектора в пространстве по трём некомпланарным векторам.

Особенности параграфа. В пространстве изучение операции умножения вектора на действительное число во многом аналогично тому, как это делалось для векторов на плоскости. Отличие только в том, что в пространстве доказательство геометрического свойства этой операции сложнее, чем на плоскости, и требуется приложить больше усилий, чтобы разобраться со всеми особенностями приводимых рассуждений. Свойства умножения вектора на число тоже аналогичны свойствам этой операции на плоскости.

Новое при изучении умножения вектора на число начинает проявляться тогда, когда переходят к понятиям компланарности и некомпланарности векторов. На этом этапе особое внимание следует обратить на признак компланарности векторов, поскольку во многих случаях из геометрических соображений не так просто установить, будут ли три вектора параллельны одной плоскости или нет. Главным результатом данного параграфа является теорема о разложении вектора пространства по трём составляющим. При её изучении основное внимание следует обратить на то обстоятельство, что каждый вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации трёх выбранных векторов только в том случае, когда эти три вектора некомпланарны.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: произведение вектора на число на плоскости; коллинеарность векторов; разложение вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

Новые математические понятия: умножение вектора на действительное число в пространстве; коллинеарность векторов; параметрическое задание прямой; компланарность векторов; некомпланарность векторов; линейная комбинация векторов; разложение вектора пространства по трём некомпланарным векторам.

Математические понятия, упоминаемые в порядке ознакомления: базис системы координат.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Как доказать, что $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$?

Ответ. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$. Из пункта следует, что для получения вектора $(-1)\cdot\overrightarrow{OA}$ нужно на дополнении луча OA отложить отрезок OB, равный OA, и в результате $(-1)\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. Поскольку $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$, то $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

4.2.** Как доказать геометрическое свойство умножения вектора на число при умножении на отрицательное число?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{OA}=(a;\ b;\ c)$. Построим на дополнении луча OA точку C так, что $|OC|:|OA|=|t|$. Проведём плоскость α через ось Ox и прямую OA. В плоскости α через точки A и C проведём прямые m и n, перпендикулярные Ox и пересекающие Ox в точках A_1 и C_1 соответственно. Далее рассмотрим три случая в зависимости от абсциссы точки A.

I. Пусть абсцисса a точки A положительна, как это изображено на рис. 1. Из подобия треугольников AOA_1 и COC_1 следует, что $|OC_1|:|OA_1|=|OC|:|OA|=|t|$, откуда $|OC_1|=|t|\cdot a$. Так как точки A и C расположены на разных лучах с началом O прямой AC, точки A_1 и C_1 также расположены на разных лучах оси Ox с началом O. Отсюда следует, что координата точки C_1 по оси Ox отрицательна, а так как $|OC_1|=|t|\cdot a$, то координата точки C_1 равна $-|t|\cdot a=ta$ и равна абсциссе точки C.

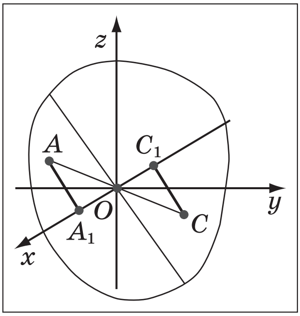


Рис. 1

II. Пусть абсцисса a точки A равна нулю, то есть $a=0$ (рис. 2). Тогда точки A_1 и C_1 совпадают с точкой O, а поэтому абсцисса точки C равна $ta=t\cdot 0=0$.

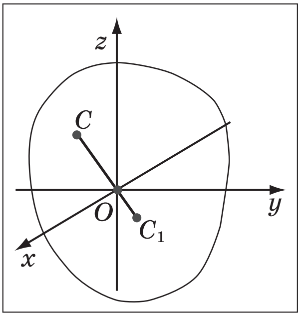


Рис. 2

III. Пусть абсцисса точки A отрицательна, как это изображено на рис. 3. Из подобия треугольников AOA_1 и COC_1 следует, что $|OC_1|=|t|\cdot|a|$. Так как точки A и C расположены на разных лучах с началом O пря-

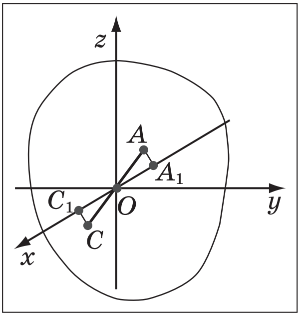


Рис. 3

мой AC, точки A_1 и C_1 также расположены на разных лучах с началом O оси Ox. Отсюда следует, что координата точки C_1 по оси Ox положительна, а так как $|OC_1| = |t| \cdot |a|$, то координата точки C_1 равна $|t| \cdot |a| = (-t) \cdot (-a) = ta$ и равна абсциссе точке C. В результате доказано, что во всех возможных случаях абсцисса точки C равна ta.

Аналогично, рассматривая плоскость β, проходящую через ось Oy и прямую OA, придём к тому, что ордината точки C равна tb, рассматривая плоскость γ, проходящую через ось Oz и прямую OA, придём к тому, что аппликата точки C равна tc. В итоге получим, что точка C имеет координаты $(ta; tb; tc)$, то есть $\overrightarrow{OC} = ta$.

4.3. Как доказать свойство $s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$?

Ответ. Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$s \cdot \vec{a} = (sx_1; sy_1; sz_1),\ s \cdot \vec{b} = (sx_2; sy_2; sz_2),$$

$$s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s(x_1 + x_2); s(\vec{y}_1 + y_2); s(z_1 + z_2));$$

$$s\vec{a} + s\vec{b} = (sx_1; sy_1; sz_1) + (sx_2; sy_2; sz_2) = s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}.$$

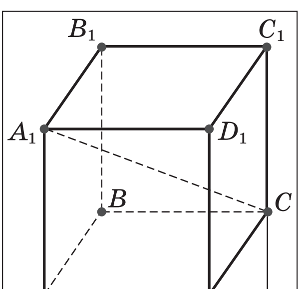


Рис. 4

4.4. Как в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изобразить связанный с точкой A вектор, равный вектору $\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C}$ (рис. 4)?

Ответ. Отложим на продолжении ребра C_1C точку F так, что $CF = CC_1$. Затем на отрезке AF построим точку P так, что $AP : AF = 2 : 3$. Так как четырёхугольник AA_1CA — параллелограмм, то $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{A_1C}$. Поэтому $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C}$.

4.5. Как доказать, что коллинеарные векторы лежат на параллельных прямых?

Ответ. Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и $\overrightarrow{AB} \neq 0$. По определению это означает, что если изобразить вектор $\overrightarrow{AM}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$, то точки A, M, B лежат на одной прямой. Из условия $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD}$ следует, что либо все точки A, M, C, D лежат на одной прямой, либо четырёхугольник $AMDC$ параллелограмм. В первом случае все точки A, M, C, D лежат на одной прямой, а поэтому можно считать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных совпадающих прямых. Во втором случае векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых AB и CD.

4.6. Проходит ли прямая $x = 3 + 2t$, $y = 4 - 3t$, $z = 2 + t$ через точку $(-1; 10; -1)$?

Ответ. Если $x = 3 + 2t$ при $x = -1$, то $3 + 2t = -1$, откуда $t = -2$. При этом значении t получаем: $y = 4 - 3t = 4 + 6 = 10$, $z = 2 + t = 2 - 2 = 0$. Так как последняя координата не совпадает с последней координатой заданной точки, то заданная прямая не проходит через заданную точку.

4.7. Как доказать, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они лежат на трёх прямых, параллельных одной плоскости?

Ответ. Сначала рассмотрим случай, когда все три вектора ненулевые, и при этом проведём два рассуждения.

I. Пусть векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$ компланарны. Это означает, что если с началом в одной точке O изобразить векторы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OK}$, то все точки O, M, N, K по определению будут лежать в одной плоскости α. В результате получим, что прямая AB параллельна прямой OM плоскости α, прямая CD параллельна прямой ON плоскости α, прямая EF параллельна прямой OK плоскости α, откуда и следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат на прямых, параллельных одной плоскости.

II. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF}$ и прямые AB, CD, EF параллельны плоскости α. Построим плоскость β, которая параллельна плоскости α и не содержит ни одну из точек A, B, C, D, E, F. Выберем в плоскости β некоторую точку O. Так как $AB \parallel \beta$, то плоскость OAB пересекает плоскость β по прямой m, параллельной AB.

Поэтому если построить параллелограмм $OABM$, то $\overrightarrow{OM} = AB$, точка M лежит на прямой m, а значит, $M \in \beta$. Аналогично, если построить параллелограмм $OCDN$, то получим $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$ и $N \in \beta$; если построить параллелограмм $OEFK$, то получим $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{EF}$ и $K \in \beta$. В итоге по определению получаем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Случай, когда векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ ненулевые и $\vec{c} = \overrightarrow{EF} = \vec{0}$, рассматривается аналогично, но при этом точки E, F совпадают и вектор $\vec{c}$ изображается на любой прямой, проходящей через точку E.

Случай, когда вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ненулевой и $\vec{b} = \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, $\vec{c} = \overrightarrow{EF} = \vec{0}$, проще, так как тогда все векторы легко изобразить на любой плоскости, содержащей прямую, которая параллельна прямой AB.

В случае $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} = \vec{0}$, $\vec{c} = \vec{0}$ векторы всегда можно изобразить на одной прямой, которая параллельна любой заданной плоскости.

4.8. Как в рассмотренном примере разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AS}$ вектор, связанный с точкой A и равный вектору $\overrightarrow{MA}$?

Ответ. В пункте найдено, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Поэтому вектор $\overrightarrow{AP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ удовлетворяет равенству $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = 0$, но и $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

4.9. Пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ — четыре произвольных вектора пространства. Как доказать, что найдутся числа x, y, z, t такие, что $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} = \vec{0}$, причём хотя бы одно из чисел x, y, z, t не равно нулю?

Ответ. Рассмотрим все возможные случаи следующим образом. Если $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, то можно взять $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ и далее равенство верно. Если $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ и векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{OB} = m \cdot \overrightarrow{OA}$, и тогда можно взять $x = -m$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 0$, и данное равенство верно. Если векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны, а векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ компланарны, то $\overrightarrow{OC} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$, и тогда можно взять $x = -m$, $y = -n$, $z = 1$, $t = 0$, и данное равенство верно. Если векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ некомпланарны, то $\overrightarrow{OD} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{OC}$, и тогда можно взять $x = -m$, $y = -n$, $z = -k$, $t = 1$, и данное равенство верно. В итоге рассмотрены все возможные случаи, и в каждом из них найдены числа x, y, z, t так, как требуется.

4.10.** Как показать, что векторы (1; 1; 1), (1; 1; 0), (1; 0; 0) являются базисом в пространстве и определяют некоторую косоугольную систему координат?

Ответ. Для каждого вектора $(a;\ b;\ c)$ запишем равенство $(a;\ b;\ c) = x(1;\ 1;\ 1) + y(1;\ 1;\ 0) + z(1;\ 0;\ 0)$ с неизвестными x, y, z, откуда $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x + y = b, \\ x = c. \end{cases}$ Решая данную систему, получим единственное решение $x = c$, $y = b - c$, $z = a - b$. Таким образом, каждый вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации заданных векторов.

Указания к решению наиболее трудных задач

6.* Докажите, что любые ненулевые сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяют условию $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, где через $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ обозначены длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание. Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$, где число t положительно и равно отношению $|\vec{a}| : |\vec{b}|$.

10.* Найдите вектор единичной длины, сонаправленный вектору $\overrightarrow{AB}$, если:

а) $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(6;\ 5;\ 4)$; б) $A(1;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 1;\ 0)$;

в) $A\left(\dfrac{1}{2};\ 1;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$; г) $A\left(\dfrac{1}{2};\ 1;\ \dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(1;\ \dfrac{3}{2};\ 2\right)$.

Указание. Заданный вектор нужно умножить на число, обратное длине вектора.

13.* В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах CD, CB, CC_1 так, что $CM = \frac{1}{3}CD$, $CN = \frac{1}{4}CB$, $CK = \frac{4}{5}CC_1$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{B_1M}$, $\overrightarrow{D_1N}$, $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$.

Указание. Прежде всего, $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{4}{5}\vec{c}$. Далее, каждый из векторов $\overrightarrow{PQ}$ можно представить в виде $\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}$.

Аналогичные представления векторов можно рассматривать и в задаче 14.**

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Прямая, проходящая через точку $A(5; 0; -3)$, задана параметрически: $x = 5 - t$, $y = 3t$, $z = -3 + 2t$. Чему равна длина отрезка AB, если точка B соответствует значению параметра $t = -\sqrt{2}$?

1) $2\sqrt{7}$ 2) $7\sqrt{2}$ 3) $4\sqrt{7}$ 4) $2\sqrt{14}$

Указание. Ответ можно получить, умножив длину вектора $(-1; 3; 2)$ на число $\sqrt{2}$.

2.2. Какими свойствами обладает равенство векторов в пространстве?

1) если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $|AB| = |CD|$

2) если $|AB| = |CD|$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

3) если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

4) если $AB \parallel CD$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Указание. В каждом из вариантов присутствует равенство векторов, и определение этого равенства сопоставить с другой частью сформулированного утверждения.

§ 5. СВОБОДНЫЕ ВЕКТОРЫ

Цель параграфа — в пространстве определить свободные векторы, операции над свободными векторами и рассмотреть свойства этих операций.

Особенности параграфа. Понятие свободного вектора в пространстве, как и на плоскости, является формальной конструкцией, которая равные между собой связанные векторы рассматривает как единый объект и имеет преимущественно теоретическое значение. Все формулировки утверждений приводятся без доказательства, и по этой причине весь параграф рассчитан на первый уровень. Вопросы к пунктам и предлагаемые задачи и упражнения рассчитаны на то, чтобы учащиеся освоили понятие свободного вектора в пространстве, опираясь на аналогию с векторами на плоскости. На третьем уровне в ознакомительном плане рассказывается о возможности дальнейших обобщений, вопрос к пункту посвящён примеру четырёхмерного арифметического векторного пространства.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным на плоскости: свободный вектор; сумма свободных векторов; разность свободных векторов; произведение свободного вектора на число; разложение свободного вектора на плоскости по двум направлениям.

Новые математические понятия: свободный вектор в пространстве; операции над свободными векторами в пространстве; разложение свободного вектора в пространстве по трём составляющим.

Вспомогательные математические понятия: четырёхмерное пространство.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

5.1. Как доказать, что $[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{CD}]$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

Ответ. 1. Пусть $[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{CD}]$. Это означает, что множество всех связанных векторов, которые равны $\overrightarrow{AB}$ и среди которых есть вектор $\overrightarrow{AB}$, равно множеству всех связанных векторов, которые равны $\overrightarrow{CD}$ и среди которых есть вектор $\overrightarrow{CD}$. Таким образом, связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ принадлежат одному множеству попарно равных векторов, а поэтому $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

2. Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Рассмотрим произвольный связанный вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\in[\overrightarrow{AB}]$. Тогда $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, а значит, $\vec{x}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Поэтому $\vec{x}\in[\overrightarrow{CD}]$. Аналогично доказывается, что если $\vec{y}\in[\overrightarrow{CD}]$, то $\vec{y}\in[\overrightarrow{AB}]$. В результате приходим к тому, что $[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{CD}]$.

5.2. Как определить сонаправленные и противоположно направленные свободные векторы?

Ответ. Свободные векторы сонаправлены или противоположно направлены, когда их изображения с началом в одной точке соответственно сонаправлены или противоположно направлены.

5.3. Как доказать, что сумма свободных векторов не зависит от выбора их представителей?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ — представители свободного вектора $\vec{a}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{C_2D_2}$ — представители свободного вектора $\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{C_2D_2}$, а это означает, что обе суммы принадлежат одному и тому же свободному вектору.

5.4. Как доказать «правило треугольника» для свободных векторов $[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}] = [\overrightarrow{AB}]$?

Ответ. По определению, $[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}] = [\vec{m}]$, если $[\vec{m}] + [\overrightarrow{OA}] = [\overrightarrow{OB}]$. Так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{AB} \in [\vec{m}]$, а поэтому $[\vec{m}] = [\overrightarrow{AB}]$.

5.5. Как доказать, что произведение свободного вектора на число не зависит от выбора представителя?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ — представители свободного вектора $\vec{a}$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, откуда $t \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = t \cdot \overrightarrow{A_2B_2}$, а это означает, что оба произведения принадлежат одному и тому же свободному вектору.

5.6. Как доказать, что изображения с началом в одной точке двух ненулевых коллинеарных свободных векторов лежат на одной прямой?

Ответ. Свободные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если их изображения $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, связанные с одной точкой, коллинеарны. Это означает, что точки O, A, B лежат на одной прямой.

5.7. Как доказать, что три вектора компланарны, если два из них коллинеарны?

Ответ. Пусть даны три свободных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Построим изображения $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ этих векторов с началом в одной точке. Тогда точки O, A, B лежат на одной прямой, а поэтому все четыре точки O, A, B, C

лежат в одной плоскости, откуда по определению следует компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5.8. Как доказать теорему о разложении свободных векторов по трём некомпланарным векторам?

Ответ. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три некомпланарных свободных вектора пространства и $\vec{m}$ — произвольный свободный вектор пространства. Построив изображения этих векторов с началом в одной точке O, получим три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и ещё вектор $\overrightarrow{OM}$ — изображение свободного вектора $\vec{m}$. По теореме о разложении связанных векторов по трём некомпланарным векторам получим, что найдутся числа x, y, z, для которых выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$. Но это, по определению операций над свободными векторами, соответствует равенству $\vec{m} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$, что и требовалось доказать.

5.9.** Назовём четырёхмерными векторами упорядоченные четвёрки чисел $(x;\ y;\ z;\ t)$, где числа рассматриваются как координаты. Как можно определить операции сложения и умножения на число для таких векторов?

Ответ. Эти операции можно определить по аналогии с определением операций для трёхмерных векторов. А именно: $(x_1;\ y_1;\ z_1;\ t_1) + (x_2;\ y_2;\ z_2;\ t_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2;\ t_1 + t_2)$; $m \cdot (x;\ y;\ z;\ t) = (mx;\ my;\ mz;\ mt)$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.* Докажите, что если свободный вектор $[\overrightarrow{AB}]$ коллинеарен свободному вектору $[\overrightarrow{CD}]$ и свободный вектор $[\overrightarrow{CD}]$ коллинеарен свободному вектору $[\overrightarrow{EF}]$, то свободные векторы $[\overrightarrow{AB}]$ и $[\overrightarrow{EF}]$ коллинеарны.

Указание. Изображая заданные свободные векторы векторами, связанными с одной точкой, сразу получаем, что все изображения лежат на одной прямой, откуда и следует утверждение задачи.

4.** Даны три свободных вектора $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{CD}]$ и $[\overrightarrow{EF}]$. Известно, что векторы $[\overrightarrow{AB}]$ и $[\overrightarrow{CD}]$ коллинеарны. Докажите, что векторы $[\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{CD}]$ и $[\overrightarrow{EF}]$ компланарны.

Указание. При $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}] = \vec{0}$ все заданные векторы коллинеарны, а поэтому и компланарны. Если, например, $[\overrightarrow{AB}] \neq \vec{0}$, то $\overrightarrow{CD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, откуда $[\overrightarrow{CD}] = \alpha \cdot [\overrightarrow{AB}] + 0 \cdot [\overrightarrow{EF}]$, а поэтому данные векторы компланарны по соответствующему признаку.

Аналогично решается задача 5.**

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.1. Векторы $\vec{a} = AB$ и $\vec{b} = AC$ неколлинеарны, и $AM = x\vec{a} + y\vec{b}$. При каких значениях x, y точка M лежит на отрезке BC?

1) $x = \frac{1}{4},\ y = \frac{1}{2}$
2) $x = \frac{3}{5},\ y = \frac{2}{5}$
3) $x = \frac{1}{6},\ y = \frac{2}{3}$
4) $x = \frac{5}{8},\ y = \frac{3}{8}$

Указание. Сумма $x + y$ должна равняться 1.

2.2. Пусть $\vec{a} = (0;1;1)$, $\vec{b} = (1;1;1)$. Какие из указанных векторов $\vec{c}$ компланарны вместе с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

1) $\vec{c} = (-2;\ 3;\ 3)$
2) $\vec{c} = (3;\ -2;\ 3)$
3) $\vec{c} = (-4;\ -4;\ 2)$
4) $\vec{c} = (2;\ -4;\ -4)$

Указание. Варианты, в которых вторая и третья координаты не равны, можно удалить сразу.

2.3. Пусть $A(0;\ 1;\ -2)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$. Какие из точек с указанными координатами лежат на прямой AB?

1) $(5;\ -4;\ -12)$
2) $(-2;\ -1;\ 4)$
3) 3) $(4;\ 5;\ -10)$
4) $(-3;\ -3;\ 7)$

Указание. Можно рассмотреть параметрическое задание этой прямой: $x = -t$, $y = 1 - t$, $z = -2 + 3t$, $t \in R$.

2.4. Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$ некомпланарны, и $\overrightarrow{SM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. При каких значениях x, y, z точка M лежит внутри пирамиды $SABC$?

1) $x = y = \frac{1}{4},\ z = \frac{1}{3}$
2) $x = z = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{2}$
3) $y = z = \frac{2}{7},\ x = \frac{3}{8}$
4) $x = y = z = \frac{1}{4}$

Указание. Часть условий: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ — выполняется во всех вариантах. Кроме того, должно выполняться условие $x + y + z < 1$.

Глава 5
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Цель главы — ознакомиться с теоремой Лагранжа о среднем, установить связь производной с возрастанием и убыванием функции, рассмотреть основные этапы исследования функций, построение графиков и примеры задач о нахождении наибольших и наименьших значений.

Особенности главы. Основой для изучения числовых функций служат многие непростые понятия и утверждения, которые обычно изучаются в вузах в курсах математического анализа. С учётом этого обстоятельства наиболее сложные утверждения, которые необходимы для изучения свойств числовых функций, формулируются и принимаются без доказательства. Исходя из этого, как следствия, выводятся другие важные утверждения, и тем самым создаются основы для изучения функций с достаточным логическим обоснованием нужных свойств.

В главе появляется много новых математических понятий, и чтобы облегчить их усвоение, во втором параграфе отдельно выделяется и изучается каждый из основных этапов исследования. В последнем параграфе рассматриваются задачи практической направленности о нахождении наибольших или наименьших значений.

На первом и втором уровне исследование функций рассматривается в ограниченном объёме, а на третьем уровне значительно шире.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: предел функции; непрерывность; производная; уравнение касательной; монотонность функции на промежутке; абсолютная погрешность; относительная погрешность.

Новые математические понятия: формула конечных приращений; теорема Лагранжа; промежуток знакопостоянства функции; односторонний предел; предел функции на бесконечности; вертикальная асимптота; точка локального экстремума; наклонная асимптота; промежуток выпуклости функции; наибольшее и наименьшее значения функции на множестве; критическая точка функции.

§ 1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА О СРЕДНЕМ

Цель параграфа — рассмотреть приближение функции линейными функциями, ознакомиться с теоремой Лагранжа о среднем, на основе которой устанавливается связь производной со значениями функции, вывести достаточные условия монотонности функции на промежутке.

Особенности параграфа. На первом уровне изучение материала ограничивается знакомством с теоремой Лагранжа, иллюстрациями её геометрического смысла и применением теоремы Лагранжа к выводу условий, при которых функция либо строго возрастает на промежутке, либо строго убывает. На третьем уровне достаточно подробно рассматриваются вопросы, связанные с приближением заданной функции в окрестности некоторой точки соответствующей линейной функции, с оценкой погрешности приближения, приводятся примеры повышенного уровня сложности.

Новые математические понятия: формула конечных приращений; теорема Лагранжа.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Как доказать, что $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$, причём ошибка мала по сравнению с $|x|$?

Ответ. $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + 3x + x \cdot y(x)$, где $y(x) = 3x + x^2 \to 0$ при $x \to 0$.

1.2. Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа при условии $f(a) = f(b)$?

Ответ. В этом случае существует точка графика, в которой касательная параллельна оси Ox.

1.3.** Какова абсолютная погрешность формулы $\sqrt{1+x} \approx$ $\approx 1 + \frac{1}{2}x$ при $-\frac{1}{4} < x < 0$?

Ответ. Так как $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, то при $-\frac{1}{4} < c < 0$ имеем $\sqrt{1 + c} > \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$, $\frac{1}{2} < f'(c) \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$. Поэтому

$$|f'(c) - f'(0)| = f'(c) - f'(0) < \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}.$$

Следовательно, $\left|\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x\right|<\frac{1}{10}\cdot|x|<\frac{1}{40}$ при $-\frac{1}{4}<x<0$.

1.4. Как доказать второе утверждение теоремы из этого пункта?

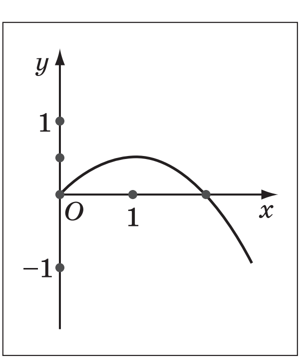
Имеется в виду утверждение, что если производная функции $f(x)$ отрицательна в каждой точке промежутка D, то функция строго убывает на этом промежутке.

Ответ. Возьмём две произвольные точки x_1, x_2 из D такие, что $x_1 < x_2$. Тогда на отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ определена, имеет производную и поэтому непрерывна. Следовательно, можно применить теорему Лагранжа и записать равенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Так как точка c лежит в интервале $(x_1; x_2)$, то она принадлежит промежутку D, а поэтому $f'(c) < 0$. Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $x_2 - x_1 > 0$. Значит, $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$, что и требовалось доказать.

1.5.** Как доказать, что при $0 < r < 1$ выполняется неравенство $(1 + z)^r \leq 1 + rz$ при всех $z > -1$?

Ответ. Пусть $0 < r < 1$ — некоторое действительное число. Рассмотрим функцию $f(x) = x^r - rx$, определённую и непрерывную для $x > 0$. Так как $(x^r)' = rx^{r-1}$, то $f'(x) = rx^{r-1} - r = r(x^{r-1} - 1)$. При отрицательном $r - 1$ функция x^{r-1} строго убывает. Поэтому $f'(x) = 0$ при $x = 1$; $f'(x) > 0$ при $0 < x < 1$; $f'(x) < 0$ при $x > 1$. Отсюда следует, что график функции $f(x) = x^r - rx$ выглядит примерно так, как изображено на рисунке. График иллюстрирует, что значение $f(1) = 1 - r$ является наибольшим значением функции $f(x)$, откуда следует неравенство $x^r - rx \leq 1 - r$, справедливое при всех $x > 0$. Заменим в этом неравенстве x на $1 + z$. В результате придём к неравенству

$$(1 + z)^r - r(1 + z) \leq 1 - r.$$



Следовательно, $(1 + z)^r \leq 1 + rz$ при всех $z > -1$.

Полученное неравенство является обобщением известного неравенства Бернулли для натурального показателя степени на случай произвольного показателя $0 < r < 1$.

Указания к решению наиболее трудных задач

1. ж)** Найдите производную от функции $f(x)$ и значение производной при $x = a$, если $f(x) = \cos(\arcsin x)$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Указание. Функцию $f(x) = \cos(\arcsin x)$ можно представить в виде функции $h(g(x))$, взяв $g(x) = \arcsin x$, $h(z) = \cos z$. Так как $(\cos z)' = -\sin z$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, то по правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$f'(x) = (\cos(\arcsin x))' = (-\sin(\arcsin x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

После этого находим $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = -1.$

2. ж)** Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = 2^x$, $a = 2$.

Указание. По таблице производных $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$. Поэтому при $a = 2$ имеем $f(2) = 2^2 = 4$, $f'(x) = 2^2 \cdot \ln 2 = 4\ln 2$, и уравнение касательной имеет вид $y = 4 + 4\ln 2 \cdot (x - 2)$ или $y = (4\ln 2) \cdot x - 4(\ln 4 - 1)$.

3.** Для приближённой формулы $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ оцените погрешность при $|x - a| < b$, если:

а) $f(x) = x^2$, $a = 2$, $b = 0{,}5$; б) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 0{,}1$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$, $b = 1$; г) $f(x) = \ln(1 + x)$, $a = 0$, $b = 0{,}1$.

Указание. В параграфе показано, что если $|x - a| < b$, то $|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))| < M \cdot |x - a|$, где M больше или равно максимуму $|f'(c) - f'(a)|$ по всем c, принадлежащим промежутку $(a - b; a + b)$. На основе этого решаются задачи из всех пунктов.

а) $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, |f'(c) - f'(2)| = 2 \cdot |c - 2| < 2 \cdot 0{,}5 = 1$. Поэтому $|f(x) - (4 + 4(x - 2))| = |x^2 - (4x - 4)| < 1 \cdot |x - 2| < 0{,}5$.

б) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $|f'(c) - f'(0)| = |\cos c - 1| = 2\sin^2\frac{c}{2} < 2 \cdot \frac{c^2}{2} < 0{,}005$. Поэтому $|\sin x - 0 - 1 \cdot (x - 0)| = |\sin x - x| < 0{,}005 \cdot |x| < 0{,}0005$.

в) $f(x)=\sqrt[3]{x}, f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$|f'(c)-f'(8)|=\left|\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\cdot 2^2}\right|=\left|\frac{(\sqrt[3]{c}-2)(\sqrt[3]{c}+2)}{3\cdot 4\sqrt[3]{c^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{|c-8|(\sqrt[3]{c}+2)}{3\cdot 4\sqrt[3]{c^2}\cdot(\sqrt[3]{c^2}+2\sqrt[3]{c}+4)}\right|<\left|\frac{1\cdot(\sqrt[3]{9}+2)}{3\cdot 4\cdot\sqrt{7^2}\cdot(\sqrt[3]{7^2}+2\sqrt[3]{7}+4)}\right|<\frac{1}{80}.$$

Последнее неравенство легко получается из простых оценок $1{,}9<\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[3]{9}<2{,}1$. Поэтому

$$\left|\sqrt[3]{x}-\left(2+\frac{1}{12}(x-8)\right)\right|=\left|\sqrt[3]{x}-\left(\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}\right)\right|<\frac{1}{80}\,|x-8|<0{,}0125.$$

г) $f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $|f'(c)-f'(0)|=\left|\dfrac{1}{1+c}-1\right|=$

$=\left|\dfrac{c}{1+c}\right|<\left|\dfrac{0{,}1}{1-0{,}1}\right|=\dfrac{1}{9}$. Поэтому

$$|\ln(1+x)-(0+1\cdot(x-1))|=|\ln(1+x)-x|<\frac{1}{9}\cdot|x|<\frac{1}{90}.$$

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.1.** Какие из указанных неравенств являются верными при каждом $x\ge 0$?

1) $\sqrt[3]{(1+x)^2}\le 1+\dfrac{2}{3}x$ 2) $\sqrt[3]{(1+x)^2}\ge 1+\dfrac{2}{3}x$

3) $\sqrt[3]{(1+x)^4}\ge 1+\dfrac{4}{3}x$ 4) $\sqrt[3]{(1+x)^4}\le 1+\dfrac{4}{3}x$

Указание. Производная $\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$. По формуле Лагранжа на промежутке $[0;x]$ найдётся такая точка c, для которой справедливо равенство $\sqrt[3]{(1+x)^2}=1+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+c}}$. Аналогично производная $\left(\sqrt[3]{(1+x)^4}\right)'=\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{1+x}$. По формуле Лагранжа найдётся такая точка $c\in[0;x]$, для которой справедливо равенство $\sqrt[3]{(1+x)^4}=1+\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{1+c}\cdot x$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Цель параграфа — рассмотреть характерные особенности, на которые следует обращать внимание при исследовании функции.

Особенности параграфа. В параграфе последовательно рассматриваются основные этапы исследования функций: нахождение естественной области определения, промежутков непрерывности, нулей и промежутков знакопостоянства, выявление характера поведения функции вблизи граничных точек области определения и наличия вертикальных асимптот, нахождение промежутков монотонности и точек локального экстремума, наличие горизонтальных или наклонных асимптот, исследование функции на выпуклость. На каждом этапе устанавливаются некоторые особенности, которые в совокупности позволяют изобразить примерный вид графика, близкий к реальному. Каждый этап исследования функций представляет собой некоторую задачу, которая имеет определённые целевые установки, причём решение отдельных задач может оказаться непростым и трудоёмким делом. При изучении данного материала следует особо обращать внимание на итоги исследования по каждому этапу, что можно отражать как в виде результатов вычислений, так и геометрически: отмечая области, в которых расположен график, изображая части графика, вертикальные и наклонные асимптоты и т.д.

На первом и втором уровне этапы исследования функций рассматриваются в ограниченном объёме, достаточном для построения относительно несложных графиков. На третьем уровне исследование функций рассматривается значительно шире. Подробнее изучаются асимптоты, для чего приводятся точные определения пределов справа, слева, пределов на бесконечности, а в итоге даётся точное определение наклонной асимптоты и без доказательства приводятся правила вычисления коэффициентов. При изучении асимптот следует обратить внимание на то, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ у функции могут быть разные асимптоты. Понятие выпуклости рассматривается только для дифференцируемых функций. Предполагается, что исследование функции на выпуклость является вспомогательным этапом исследования.

Новые математические понятия: нуль функции, промежуток знакопостоянства функции; предел функции в точке справа и слева; промежутки монотонности функции; точка локального максимума; точка локального минимума; точки экстремума; предел функции при $x \to +\infty$; предел функции при $x \to -\infty$; наклонная асимптота; промежутки выпуклости вверх; промежутки выпуклости вниз.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Какое предположение о графике функции может напрашиваться, если вычислить значения функции $y = x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$ при $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm 3$?

Ответ. Значение функции в каждой из указанных точек равно нулю. Поэтому напрашивается предположение, что функция всюду равна нулю, но это неверно.

2.2. Каким числом неразрывных линий изображается график функции $y = \frac{x^2-4}{x(x^2-1)}$?

Ответ. Область определения функции является объединением из промежутков $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$. На каждом из промежутков функция равна отношению многочленов, то есть непрерывных функций, а поэтому и сама непрерывна. Следовательно, график изображается в виде четырёх неразрывных линий.

2.3. Какие нули, промежутки положительности и промежутки отрицательности имеет функция $y = x^3 - x$?

Ответ. Уравнение $x^3 - x = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — это нули функции. Неравенство $x^3 - x > 0$ можно решить методом интервалов, и в результате получаются промежутки $(-1; 0)$, $(1; \infty)$ — это промежутки положительности функции. Оставшиеся промежутки $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ — это промежутки отрицательности функции.

2.4. Как доказать, что функция $f'(x) = x^3 - 3x$ строго убывает на отрезке $[-1; 1]$?

Ответ. На интервале $(-1; 1)$ производная $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ отрицательна. Поэтому строгое убывание $f(x)$ на этом интервале следует из теоремы пункта 1.4. Сравним теперь значения $f(-1)$ и $f(x_0)$ для $x_0 \in (-1; 1]$. По теореме Лагранжа имеем $f(-1) - f(x_0) = f'(c_1) \cdot (-1 - x_0)$, где $c_1 \in (-1; 1)$. Так как $f'(c_1) < 0$ и $(-1 - x_0) < 0$, то $f(-1) - f(x_0) > 0$, то есть $f(-1) > f(x_0)$. Аналогично сравним значения $f(1)$ и $f(z_0)$ для $z_0 \in [-1; 1)$. По теореме Лагранжа имеем $f(1) - f(z_0) = f'(c_2) \cdot (1 - z_0)$, где $c_2 \in (-1; 1)$. Так как $f'(c_2) < 0$ и $1 - z_0 > 0$, то $f(1) - f(z_0) < 0$, то есть $f(z_0) > f(1)$.

Таким образом, если x_1, x_2 принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$ и $x_1 < x_2$, то во всех случаях $f(x_1) > f(x_2)$.

2.5. Какие точки экстремума имеет функция $f(x) = x^2 - 4x + 1$?

Ответ. График функции $f(x) = x^2 - 4x + 1$ является параболой с вершиной в точке $(2;\ -3)$, и ветви параболы направлены вверх. Поэтому из наглядных соображений сразу ясно, что точка $a = 2$ является точкой локального минимума, причём других точек локального экстремума нет. Приведём дополнительные рассуждения, показывающие, что указанная точка является единственной точкой локального экстремума данной функции.

Выберем число a и рассмотрим окрестность $D_\varepsilon = (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Пусть $a + \Delta x \in D_\varepsilon$. Рассмотрим разность $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta x \cdot (2a - 4 + \Delta x)$. Если $a > 2$ и $\varepsilon = 2a - 4 > 0$, то при $0 < \Delta x < \varepsilon$ разность $f(a + \Delta x) - f(a)$ положительна и при $-\varepsilon < \Delta x < 0$ отрицательна. Поэтому при $a > 2$ точка a не является точкой локального экстремума. Аналогично: если $a < 2$ и $\varepsilon = 4 - 2a > 0$, то разность $f(a + \Delta x) - f(a)$ при $0 < \Delta x < \varepsilon$ отрицательна и при $-\varepsilon < \Delta x < 0$ положительна. Поэтому при $a < 2$ точка a также не является точкой локального экстремума.

2.6.* Почему из равенства $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ следует существование предела функции $f(x)$ в точке a?

Ответ. Пусть M — общее значение пределов справа и слева в точке a. По определению предела слева для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число δ_1, что если x принадлежит области определения функции $f(x)$ и удовлетворяет неравенствам $a - \delta < x < a$, то $|f(x) - M| < \varepsilon$. Аналогично по определению предела справа найдётся такое $\delta_2 > 0$, что если $a < x < a + \delta_2$, то снова $|f(x) - M| < \varepsilon$. Обозначим через δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Если теперь $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, то будет выполнено одно из неравенств $a - \delta_1 < x < a$ или $a < x < a + \delta_2$. В любом случае получаем $|f(x) - M| < \varepsilon$. Таким образом, выполняется определение предела функции $f(x)$ в точке a, равного M.

2.7. Какую вертикальную асимптоту имеет график функции $y = \dfrac{1}{x+2}$?

Ответ. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ определена на множестве $(-\infty;\ 2) \cup (-2;\ \infty)$. Точка $x = 2$ является граничной точкой области определения. Если выбирать значения x, близкие к числу -2 и большие -2, то значения функции будут положительны, причём $f(x) \to +\infty$ при $x > -2$ и $x \to -2$. Если выбирать значения x, близкие к числу -2 и меньшие -2, то значения функции будут отрицательны, причём $f(x) \to -\infty$ при $x < -2$ и $x \to -2$. Поэтому прямая с уравнением $x = -2$ является вертикальной асимптотой.

2.8.* Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 100$. Как пояснить, что $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$?

Ответ. Возьмём произвольное положительное число M. Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, то по определению найдётся такое $\delta_1 > 0$, что при всех x из области определения D_1 функции $f(x)$, таких, что $0 < |x - a| + \delta_1$, выполняется неравенство $f(x) > M$. Далее, так как $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 100$, то по определению, например, для числа $\varepsilon = 1$ найдётся такое $\delta_2 > 0$, что при всех x из области определения D_2 функции $g(x)$, таких, что $0 < |x - a| < \delta_2$, выполняется неравенство $|g(x) - 100| < 1$, откуда $99 < g(x) < 101$. Выберем теперь число $\delta_0 = \min(\delta_1; \delta_2)$. Если $x \in D_1 \cap D_2$ и $0 < |x - a| < \delta_0$, то $f(x) + g(x) > M + 99 > M$. Таким образом, для каждого положительного числа M найдено такое $\delta_0 > 0$, что при всех x из области определения функции $f(x) + g(x)$, таких, что $0 < |x - a| < \delta_0$, выполняется неравенство $f(x) + g(x) > M$. По определению бесконечного предела имеем $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

2.9.* Как на основе определений доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$?

Ответ. I. Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Для него выберем $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда, если $x > M$, то $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$. Поэтому по определению $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$. II. Докажем, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$. Снова выберем $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда если $x < -M$, то $|x| > M$ и $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$. Поэтому по определению $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to -\infty$.

2.10.* Какие уравнения имеют асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x-1}$?

Ответ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x+1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \dfrac{2}{x-1}) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x+1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-1 - \dfrac{2}{x-1}\right) = -1$. Поэтому график функции при $x \to +\infty$ приближается к прямой $y = 1$, а при $x \to -\infty$ приближается к прямой $y = -1$. Эти прямые и будут асимптотами. Кроме того, прямая с уравнением $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика данной функции.

2.11.** Какое уравнение имеет асимптота графика функции $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ при $x = \to -\infty$?

Ответ. $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x(|x|+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x}{|x|+1} - \dfrac{1}{x(|x|+1)}\right) = -1$;

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{|x|+1} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + x|x| + x}{|x|+1} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|x|+1} = -1$ (так как $x^2 = -x|x|$ при $x < 0$). Таким образом, искомая асимптота имеет уравнение $y = -x - 1$.

2.12.** Как доказать, что функция $f(x) = e^x$ выпукла вниз на всей числовой прямой?

Ответ. Для функции $f(x) = e^x$ имеем $f'(x) = e^x$ при любом x. Следовательно, производная $f'(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а поэтому сама функция $f(x)$ всюду выпукла вниз.

2.13.* Как схематически изобразить график функции $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$?

Указание. Эта функция определена на промежутке $[0; \infty)$, строго возрастает, $y(0) = 0$, при больших значениях x значения функции относительно мало отличаются от значений $\sqrt{x}$. Поэтому схематически график данной функции очень похож на график функции $g(x) = \sqrt{x}$. На третьем уровне можно найти производную данной функции и заметить, что она монотонно убывает, следовательно, график будет выпуклым вверх.

Указания к решению наиболее трудных задач

5. Найдите промежутки знакопостоянства для функции:

ё)** $f(x) = x - \sqrt{x} - 2$; ж)** $f(x) = \sqrt{x+2} + 2x - 6$.

Указание. ё)** Для решения уравнения $f(x) = 0$ обозначим $\sqrt{x}$ через t; при этом $t \geq 0$. Тогда $t^2 - t - 2 = 0$, $t_1 = -1 < 0$ — не подходит, при $t_2 = 2$ получаем $x = 4$. Для решения неравенства $f(x) > 0$ также обозначим $\sqrt{x}$ через t. Тогда $t^2 - t - 2 > 0$ и решения этого квадратного неравенства $t < -1$ и $t > 2$. Выбирая $t \geq 0$, получаем $t > 2$, откуда $\sqrt{x} > 2$ и $x > 4$. На оставшейся части области определения $f(x) < 0$.

ж)** Для решения уравнения $f(x) = 0$ обозначим $\sqrt{x+2}$ через t, причём $t \geq 0$. Тогда $x = t^2 - 2$, и уравнение $f(x) = 0$ запишется в виде $t + 2(t^2 - 2) - 6 = 0$, откуда $2t^2 + t - 10 = 0$, $t_1 = -\frac{5}{2} < 0$ и поэтому не подходит, при $t_2 = 2$ получаем $\sqrt{x+2} = 2$ и $x = 2$. Для решения неравенства $f(x) > 0$ также обозначим $\sqrt{x+2}$ через t. Тогда получим $2t^2 + t - 10 > 0$, и решение этого квадратного неравенства $t_1 < -\frac{5}{2}$ и $t > 2$. Выбирая $t \geq 0$, получаем $t > 2$, откуда $\sqrt{x+2} > 2$ и $x > 2$. На оставшейся части области определения $f(x) \leq 0$.

6. г)* Найдите промежутки монотонности и точки локального экстремума для функции $f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt{x}$.

Указание. $f'(x) = ((x - 2) \cdot \sqrt{x})' = (x - 2)' \cdot \sqrt{x} + (x - 2) \cdot (\sqrt{x})' =$ $= 1 \cdot \sqrt{x} + (x - 2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$. После этого с учётом области определения функции ($D(f) = [0; +\infty)$) нужно решить неравенства:

$\frac{3x-2}{2\sqrt{x}} > 0$, $3x - 2 > 0$, откуда $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$; $\frac{3x-2}{2\sqrt{x}} < 0$, $3x - 2 < 0$, а поэтому $x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Так как заданная функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0; \infty)$, то $f(x)$ строго возрастает на $\left[\frac{2}{3}; \infty\right)$ и строго убывает на $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. В точке $x = \frac{2}{3}$ функция имеет локальный минимум, а при $x = 0$ — локальный максимум.

7. г)* Изобразите график функции $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ с его горизонтальной и вертикальной асимптотой.

Указание. $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2) \cdot 1 - 1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$. Поэтому график функции $f(x)$ можно построить из графика функции

$g(x) = \dfrac{1}{x}$ с помощью симметрии относительно оси Ox и перемещений вдоль осей координат.

Аналогично решаются задачи из пунктов д)* и е)*.

Указания по работе с наиболее трудными тестами.

2.2.** Укажите, для каких функций $f(x)$ в точке 1 предел слева равен пределу справа.

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x - 1}{|x^3 - 1|}$

3) $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{x - 1}$ 4) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^3 - 1}$

Указание. Для функций из варианта 3 на промежутке $(-\infty; 1)$ выполняется соотношение $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{x - 1} = -(x^2 + x + 1)$, на промежутке $(1; \infty)$ эта функция равна $x^2 + x + 1$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 3$. Аналогично рассматриваются варианты 2 и 4.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Цель параграфа — изучить построение графиков функций на основе проведённого исследования.

Особенности параграфа. При изучении построения графиков следует обратить внимание на основную цель этой работы. Дело в том, что построение почти точного графика — это непростая работа, требующая большого объёма вычислений и невыполнимая без мощных вычислительных средств, например компьютера. Поэтому целью является изображение примерного вида графика, в той или иной степени близкого к реальному. Делается это на основе исследования, этапы которого рассматривались в предыдущем параграфе. В процессе исследования следует обращать внимание учащихся на проверку согласованности результатов исследования на разных этапах. Известно, что при большом объёме вычислений возможны ошибки, и расхождение в результатах исследования сразу же указывает на наличие ошибок, что заставляет перепроверить свою работу и своевременно устранить ошибки. Например, если при нахождении промежутков монотонности получилось, что на промежутке $(0; \infty)$ функция убывает, а при нахождении наклонной асимптоты получили её уравнение в виде $y = x + 3$, то эти два результата явно противоречат друг другу, что свидетельствует о наличии ошибок в проделанной работе.

Распределение материала по уровням обучения достигается за счёт уровня сложности рассматриваемых примеров и задач.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. На рис. 1 изображена часть графика функции $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Какой вид имеет весь график?

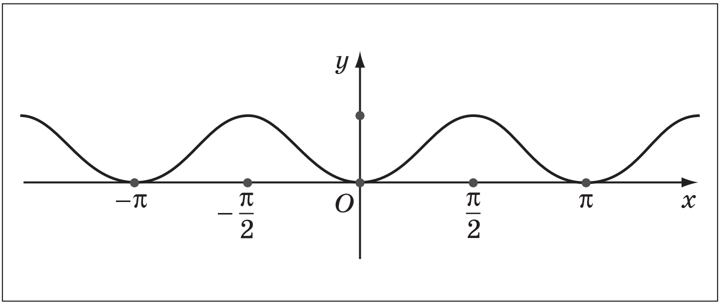


Рис. 1

Ответ. Функция $f(x) = \sin^2 x$ имеет основной период $T = \pi$, причём на отрезке $[0; \pi]$ выполняется равенство $f(\pi - x) = f(x)$. Отсюда следует, что на этом отрезке график симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. С учётом периодичности функции полный график имеет вид, изображённый на рисунке.

3.2. Сколько действительных корней имеет уравнение $(x + 1)(x - 1)^2 = 1$?

Ответ. На рис. 2, где изображён график функции $y = (x + 1)(x - 1)^2$, добавим прямую $y = 1$. Из проведённого исследования вытекает, что эта прямая пересекает график в одной точке на про-

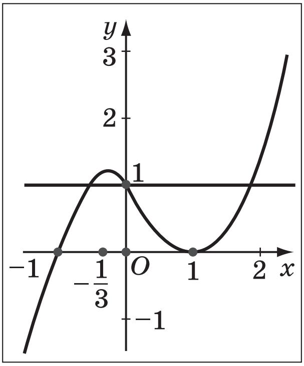


Рис. 2

межутке $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$, в одной точке на промежутке $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$ и в одной точке на промежутке $(1;\infty)$, что видно также из рисунка. Таким образом, исходное уравнение имеет три действительных корня.

3.3.* Как объяснить, что график функции

$$y=(x+5)+\left(\frac{12}{x-1}+\frac{8}{(x-1)^2}\right)$$

приближается к прямой $y = x + 5$ при больших по модулю значениях x?

Ответ. Пусть $f(x) = (x + 5) + \left(\dfrac{12}{x-1} + \dfrac{8}{(x-1)^2}\right)$. Тогда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(x+5))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{12}{x-1}+\dfrac{8}{(x-1)^2}\right)=0$.

3.4.** Как доказать, что график функции $y=2\sqrt{x^2+x+1}-x-1$ не пересекается со своими асимптотами?

Ответ. Для нахождения абсцисс точек пересечения графика функции $f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}-x-1$ и прямой $y = x$ составим уравнение $f(x)=x$, откуда $2\sqrt{x^2+x+1}=2x+1$. Для корней этого уравнения $2x+1\ge 0$ и $4(x^2 + x + 1) = (2x + 1)^2$. Так как последнее уравнение не имеет никаких корней, то нет и точек пересечения рассмотренной асимптоты с графиком.

Аналогично для второй асимптоты: составляется уравнение $2\sqrt{x^2+x+1}-x-1 = -3x - 2$, откуда $2\sqrt{x^2+x+1} = -(2x + 1)$, и это уравнение также не имеет корней.

3.5.** Какое уравнение имеет асимптота графика функции $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ при $x\to-\infty$?

Ответ. Сделаем замену переменной $x=-t$. Получится функция $g(t)=f(-t)=\sqrt{t^2-2t}$, изученная в пункте 3.5.** При $t\to\infty$ она имеет асимптоту $y=t-1$. Возвращаясь к переменной $x=-t$, для $f(x)=g(-x)$ получим асимптоту $y=-x-1$ при $x\to-\infty$.

Указания к решению наиболее трудных задач

1. д)** Проведите исследование и постройте график функции $f(x)=x^3-|2x+1|$.

Указание. 1. На промежутке $\left[-\dfrac{1}{2}; \infty\right)$ значения функции $f(x)$ вычисляются по формуле $f(x)=x^3-2x-1=(x+1)(x^2-x-1)$.

Решая уравнение $f(x) = 0$, получим корни $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, -1, из которых только число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{1}{2};\ \infty\right)$. С учётом этого $f(x) > 0$ на промежутке $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$ и $f(x) < 0$ на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Далее, $f'(x) = 3x^2 - 2$. Решив неравенство $f'(x) > 0$ на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ \infty\right)$, получим, что $x \in \left(\frac{\sqrt{6}}{3};\ \infty\right)$. Решив уравнение $f'(x) = 0$, получим $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на промежутке $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, возрастает на промежутке $\left(\frac{\sqrt{6}}{3};\ \infty\right)$ и $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ является точкой локального минимума.

2. На промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$ значения функции $f(x)$ вычисляются по формуле $f(x) = x^3 + 2x + 1$ и $f'(x) = x^2 + 2$. Отсюда следует, что $f(x)$ возрастает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$.

В итоге, с учётом непрерывности функции $f(x)$ на всей числовой прямой, получим, что $f(x) > 0$ на промежутке $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$, достигает нуля в точке $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{6}}{3};\ \infty\right)$, убывает на $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, имеет локальный максимум при $x = -\frac{1}{2}$ и локальный минимум при $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2.* г) Проведите исследование и постройте график функции $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

Указание. Функция $f(x)$ определена на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$, и на всей области определения значения функции $f(x)$ вычисляются по формуле $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

3.** е) Проведите исследование и постройте график функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{1}{2}x$.

Указание. Функция $f(x)$ определена на множестве $(-\infty; -2] \cup \cup [0; \infty)$. Решив уравнение $f(x) = 0$, найдём нули функции $x_1 = -\frac{8}{3}$ и $x_2 = 0$. С учётом этого, решив неравенство $f(x) > 0$, получим множество $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; \infty)$, на котором функция $f(x)$ положительна. Далее, $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} + \frac{1}{2}$. Уравнение $f'(x) = 0$ корней не имеет, и с учётом этого находим, что $f'(x) > 0$ на $(0; \infty)$ и $f'(x) < 0$ на $(-\infty; -2)$. Для нахождения наклонных асимптот следует решить две задачи.

1. $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$,

$b_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = 1.$

2. $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$,

$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - k_2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = -1.$

В итоге получим, что функция $f(x)$ имеет нули $-\frac{8}{3}$, 0, $f(x) > 0$ на $\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; \infty)$, возрастает на $(0; \infty)$, убывает на $(-\infty; -2)$, имеет локальные минимумы при $x = -2$ и $x = 0$, имеет наклонные асимптоты $y = \frac{3}{2}x + 1$ в положительном направлении и $y = -\frac{1}{2}x - 1$ в отрицательном направлении.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4.** При исследовании функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ было найдено, что прямая с уравнением $y = x + 5$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Какая из указанных прямых является наклонной асимптотой для графика функции $g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$?

1) $y = x + 6$ 2) $y = x + 5$ 3) $y = x + 4$ 4) $y = x + 3$

Указание. Функция $g(x)$ получается из функции $f(x)$ заменой $x + 1$ на x.

§ 4. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Цель параграфа — рассмотреть применение изученных методов исследования функций к решению задач практического значения.

Особенности параграфа. Решение задач о нахождении наибольшего или наименьшего значения функции, рассматриваемой на некотором промежутке, сводится к исследованию этой функции. Хорошей иллюстрацией результатов исследования можно считать схематический график, ориентируясь на который и удаётся получить нужный ответ. При решении задач на наибольшее или наименьшее значение следует обратить внимание на то, что в относительно простых задачах нужное наибольшее или наименьшее значение чаще всего соответствует точке, в которой производная обращается в нуль, а в итоге создаётся ложное впечатление, что так должно быть всегда. Однако это неверно, и в тексте приводятся примеры с разными возможностями для наибольшего или наименьшего значения. При решении аналогичных задач всегда следует обращать внимание на доказательства правильности полученного результата, а это напрямую зависит от исследования рассматриваемой функции.

Новые математические понятия: наибольшее значение функции на множестве; наименьшее значение функции на множестве; критическая точка функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Может ли локальный максимум функции не совпадать с её наибольшим значением?

Ответ. Может. Например, точка $x = 0$ является локальным максимумом функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1; 4]$, а наибольшее значение этой функции на данном отрезке, равное 16, достигается при $x = 4$.

4.2. Как изменится ответ к задаче в примере 1, если делать коробку наибольшего объёма из квадратного листа со стороной a?

Ответ. Задача была решена при $a = 12$, и для коробки наибольшего объёма получен ответ $V = 128$, что можно представить в виде $V = \frac{128}{12^3} \cdot 12^3 = \frac{2}{27} \cdot 12^3$. С учётом того, что подобны все коробки наибольшего объёма, которые делаются из квадратного листа, можем сразу записать ответ $V = \frac{2}{27}a^3$.

4.3.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a;\ b)$. При каких условиях множеством значений $f(x)$ на $(a;\ b)$ будет отрезок?

Ответ. Множеством значений непрерывной на интервале $(a;\ b)$ функции $f(x)$ является замкнутый промежуток тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ принимает на этом интервале наибольшее и наименьшее значение. Докажем это.

1. Пусть отрезок $[m;\ M]$ является множеством значений функции $f(x)$. Так как $m \in [m;\ M]$ и $M \in [m;\ M]$, то существуют числа x_1, x_2, принадлежащие интервалу $(a;\ b)$, и такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. Для произвольного $x \in (a;\ b)$ имеем $f(x) \in [m;\ M]$, откуда $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.

2. Пусть числа z_1 и z_2 из интервала $(a;\ b)$ таковы, что $f(z_1)$ — наименьшее значение, $f(z_2)$ — наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$. Тогда для любого $x \in (a;\ b)$ выполняются неравенства $f(z_1) \le f(x) \le f(z_2)$. Отсюда следует, что множество всех значений функции $f(x)$ на $(a;\ b)$ является подмножеством отрезка $[f(z_1);\ f(z_2)]$. Чтобы показать, что множество значений $f(x)$ на $(a;\ b)$ совпадает с этим отрезком, рассмотрим функцию $f(x)$ на отрезке $[z_1;\ z_2]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции получаем, что каждое число y из отрезка $[f(z_1); f(z_2)]$ является значением функции $f(x)$ в некоторой точке $x_0 \in [z_1;\ z_2]$. Но так как $x \in (a;\ b)$, то число y является одним из значений функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$.

4.4.* В каких точках следует искать наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, определённой и непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, которая на интервале $(a;\ m)$ строго возрастает, на интервале $(m;\ b)$ строго убывает $(a < m < b)$?

Ответ. Так как функция непрерывна на отрезке $[a; m]$ и строго возрастает на интервале $(a;\ m)$, то наибольшее значение $f(x)$ на $[a; m]$ равно $f(m)$, а наименьшее значение — равно $f(a)$. Аналогично наибольшее значение $f(x)$ на $[m; b]$ равно $f(m)$, а наименьшее значение — равно $f(b)$. Следовательно, при выполнении условий задачи наибольшее значение — это $f(m)$, а наименьшее значение — это минимум из чисел $f(a), f(b)$.

4.5. В каких точках следует искать наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и в каждой точке интервала $(a;\ b)$ имеет отличную от нуля производную?

Ответ. По теореме из данного пункта наибольшее и наименьшее значения следует искать в концах отрезка $[a; b]$.

4.6.* В тексте пункта разобрана следующая задача: «Избушка лесника находится в 5 км от города и в 4 км от прямой дороги, ведущей в город. Зимой лесник может идти по снегу со скоростью 3 км/ч, а по дороге со скоростью 4 км/ч. По какому маршруту нужно двигаться леснику, чтобы добраться от избушки до города за наименьшее время?» Было установлено, что надо идти по снегу прямо в город.

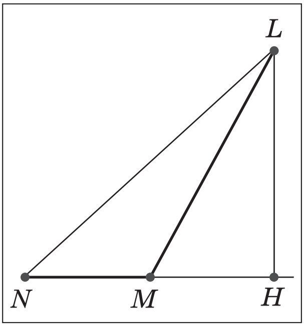


Рис. 1

Вопрос. Как изменится ответ в этой задаче, если избушка лесника находится в 5 км от города и в 3 км от прямой дороги, ведущей в город?

Ответ. Для ответа на этот вопрос надо внести необходимые изменения в решение, приведённое в пункте.

Пусть на рис. 1 точкой L обозначена избушка лесника, точкой N — город, точкой H — основание перпендикуляра, проведённого из точки L до дороги, точкой M — то место дороги, до которого лесник добирается по снегу. Тогда $NL = 5$ (км).

Обозначим MH через x (км). Тогда $NM = (4 - x)$ (км), $LM = \sqrt{9+x^2}$ (км). На движение по ломаной LMN леснику потребуется $\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{4}\right)$ часов. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{4-x}{4}$ на отрезке [0; 4]. Функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке, и $f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{4}$.

Решим уравнение $f'(x) = 0$: $\frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{4} = 0$; $\sqrt{9+x^2} = \frac{4}{3}x$; $9+x^2 = \frac{16}{9}x^2$ $(x \geq 0)$; $\frac{7}{9}x^2 = 9$, откуда $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Так как $\frac{9}{\sqrt{7}} < 4$, то найденное значение входит в отрезок [0; 4]. Поэтому для нахождения наименьшего времени нужно сравнить $f(0) = 2$, $f(4) = \frac{5}{3}$, $f\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$. Наименьшим из этих чисел является последнее.

4.7.** В тексте пункта рассмотрена следующая задача: «Прямой круговой конус с высотой H и радиусом основания R пересекается плоскостью, проходящей через вершину конуса. Как провести плоскость, чтобы площадь сечения была наибольшей?» Найдено аналитическое решение, основанное на поиске максимума функции.

Вопрос. Каким ещё способом можно решить рассмотренную задачу?

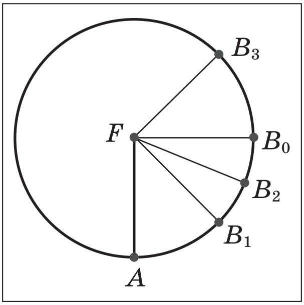


Рис. 2

Ответ. К решению можно подойти из геометрических соображений. В сечении всегда получается равнобедренный треугольник AFB с боковыми сторонами, равными $\sqrt{R^2+H^2}$. Если зафиксировать положение боковой стороны AF и изображать сечения в одной плоскости, то возможные положения вершины B расположены на окружности с центром F и радиусом AF (рис. 2). Площадь треугольника AFB тем больше, чем больше расстояние от точки B до прямой AF. С учётом этого дальше нужно рассмотреть два случая.

1. Если $H > R$, то в осевом сечении конуса получается остроугольный треугольник. В этом случае любое другое сечение будет иметь меньшую площадь.

2. Если $H \le R$, то плоскость сечения можно провести так, что в сечении получается равнобедренный прямоугольный треугольник (на рисунке треугольник AFB_0). Любое другое сечение будет иметь меньшую площадь, в том числе и осевое сечение при $H < R$.

Полученные результаты полностью согласуются с тем, что было найдено в данном пункте другим способом.

4.8.* В каком случае точка, в которой функция принимает наименьшее на промежутке значение, не является точкой локального минимума?

Ответ. Если следовать приведённому в тексте определению, то локальные экстремумы непременно должны быть внутренними точками промежутка. Этому условию не удовлетворяют граничные точки, в которых могут достигаться наименьшие или наибольшие на промежутках значения.

4.9.** Как объяснить, что функция Дирихле не имеет строгих локальных экстремумов?

Ответ. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

в каждой рациональной точке имеет локальный максимум, а в каждой иррациональной точке — локальный минимум.

Покажем, что локальные максимумы здесь нестрогие. Пусть число r рационально и $f(r) = 1$. Какую бы окрестность U точки r мы ни взяли, в ней всегда можно указать рациональное число $r_1 \neq r$. Например, можно взять $r_1 = r + \frac{1}{n}$, где n — достаточно большое натуральное число. При этом $f(r_1) = f(r)$. Значит, экстремум не будет строгим.

Аналогично доказывается, что функция Дирихле в каждой иррациональной точке имеет нестрогий локальный минимум.

Указания к решению наиболее трудных задач

5. Забором длиной 60 м у реки нужно огородить с трёх сторон прямоугольный участок наибольшей площади. Какие размеры должен иметь участок?

Указание. Обозначим через x (м) стороны участка, перпендикулярные к берегу реки. Тогда в зависимости от x площадь участка выражается функцией $S(x) = x \cdot (60 - 2x)$, где $0 < x < 30$.

6.** Забором длиной 60 м у реки нужно огородить с двух сторон участок треугольного вида наибольшей площади. Какую форму должен иметь участок?

Указание. Из всех треугольников с двумя заданными сторонами наибольшую площадь имеет треугольник с прямым углом между этими сторонами.

8.** В треугольник со сторонами 6, 7, 8 нужно вписать прямоугольник наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на стороне треугольника. Как это можно сделать?

Указание. Для решения этой задачи в общем виде обозначим основание AC через a, высоту BH через h и стороны ML и NK через x (рис. 3). Тогда $MN = a \cdot \frac{h-x}{h}$ и $S_{MNKL} = \frac{a}{h} \cdot x \cdot (h - x) = f(x)$.

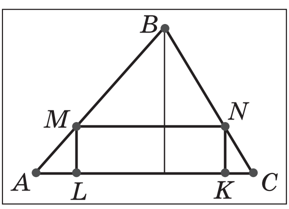


Рис. 3

После этого нетрудно получить, что максимум $f(x)$ достигается при $x = \frac{1}{2}h$, причём $f\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}ah = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$. Следовательно, в качестве одной из сторон прямоугольника наибольшей площади можно выбрать любую из средних линий данного треугольника.

9.* Из бумажного кольца с внешним радиусом $R = 6$ и внутренним радиусом $r = 1$ вырезают прямоугольник наибольшей площади так, чтобы все точки прямоугольника принадлежали этому кольцу. Чему равна площадь прямоугольника?

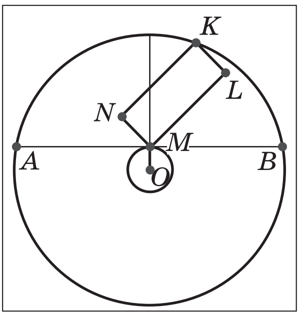


Рис. 4

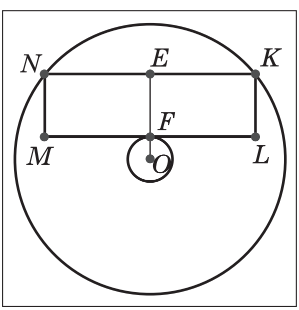


Рис. 5

Указание. Для каждого прямоугольника, у которого одна из вершин находится на внутренней границе кольца, нетрудно построить прямоугольник в два раза большей площади, который расположен внутри кольца. Пусть прямоугольник $MNKL$ расположен так, как указано на рис. 4. Построим $AB \perp OM$ и повернём прямоугольник вокруг точки M так, чтобы вершина L попала на хорду AB. При симметричном отражении повёрнутого прямоугольника относительно прямой OM будет построен внутри кольца прямоугольник вдвое большей площади, чем площадь прямоугольника $MNKL$.

В итоге задача сводится к нахождению прямоугольника наибольшей площади, у которого одна из сторон касается внутренней границы кольца (рис. 5). Если обозначить длины сторон MN и KL через x, то $OE = 1 + x$, $NE = \sqrt{6^2 - (1+x)^2} = \sqrt{35 - 2x - x^2}$, $NK = 2NE$ и $S_{MNKL} = 2x \cdot \sqrt{35 - 2x - x^2} = f(x)$, причём $0 < x < 5$. Исследуя получившуюся функцию, находим, что максимум достигается при $x = \frac{7}{2}$.

11.** Канал шириной a метров под прямым углом поворачивает в канал шириной b метров. Какой наибольшей длины бревно можно провести из одного канала в другой, не вытаскивая бревно из воды (толщиной бревна и глубиной канала можно пренебречь)?

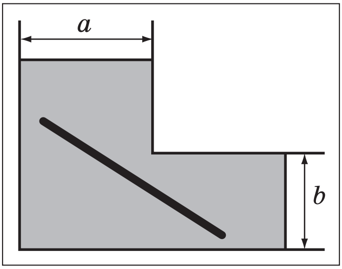


Рис. 6

Указание. Наибольшей длине бревна соответствует наименьшая длина отрезка AB, проходящего через точку M пересечения каналов (рис. 6). Если обозначить угол KAB через α, то $AM = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, $BM = \dfrac{b}{\cos\alpha}$ и $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha} + \dfrac{b}{\cos\alpha} = f(\alpha)$. Для исследования функции $f(a)$ следует вычислить $f'(a) = -\dfrac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$ и показать, что наименьшее значение достигается тогда, когда $f'(a) = 0$, то есть при $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$. При таком значении α получаем $f(a) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.2.** Какие из функций имеют разные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$?

1) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x + 2}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x + 2|}$

3) $f(x) = \dfrac{|x^3 - 1|}{x^2 - 3}$ 4) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{|x^2 - 3|}$

Указание. При вычислении углового коэффициента асимптоты используйте соотношение $x^2 = x \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

Глава 6
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель главы — рассмотреть применение прямоугольной системы координат в пространстве и векторной алгебры для решения задач по стереометрии.

Особенности главы. В начале изучения этой главы целесообразно вспомнить определения сложения векторов, умножения вектора на число и теорему о разложении вектора пространства по трём составляющим. Затем следует переходить к изучению следующей важной операции — скалярному произведению векторов. При этом особое внимание нужно обратить на геометрический смысл скалярного произведения, которое в прямоугольной системе координат приводит к простому признаку перпендикулярности ненулевых векторов в пространстве. Именно эти особенности позволяют придать геометрический смысл коэффициентам уравнения плоскости и вывести удобные формулы для вычисления расстояний и значений тригонометрических функций углов как между векторами, так и между плоскостями и между прямой и плоскостью.

В идейном плане метод координат существенно упрощает поиск решения стереометрических задач. Однако реализация решения, как правило, связана с большим количеством мелких вычислений. Поэтому овладение координатным методом требует значительной практической работы, которую нужно учиться выполнять аккуратно, без особой торопливости.

§ 1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Цель параграфа — изучить скалярное произведение векторов в пространстве и его свойства, геометрический смысл скалярного произведения, признак перпендикулярности ненулевых векторов.

Особенности параграфа. Как и при изучении векторов на плоскости, особое внимание следует обратить на то, что скалярное произведение векторов есть не вектор, а число. В остальном материал параграфа аналогичен тому, который уже рассматривался при изучении скалярного произведения векторов на плоскости.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: прямоугольная система координат в пространстве; векторы в пространстве; сложение и вычитание векторов; умножение вектора на число; разложение вектора по трём составляющим.

Новые математические понятия и свойства: скалярное произведение векторов в пространстве; геометрический смысл скалярного произведения векторов.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какой смысл имеет выражение $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$, где $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 1; 2)$ и $\vec{c} = (-2; 3; -1)$?

Ответ. Это вектор, коллинеарный вектору $\vec{c}$ и равный вектору $t \cdot \vec{c}$, где $t = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$.

1.2. Как доказать, что $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$?

Ответ. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (-1) \cdot \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$.

1.3. Какой смысл имеет произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$?

Ответ. Это число, равное квадрату длины вектора $\vec{a}$.

1.4. В каком случае два ненулевых вектора перпендикулярны?

Ответ. В случае, когда угол между этими векторами прямой.

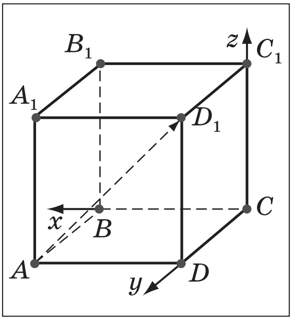
1.5. Как доказать, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$?

Ответ. Обозначим угол BAC через φ. Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\varphi$ по геометрическому смыслу скалярного произведения векторов. Используя для площади треугольника формулу $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\varphi$, получаем:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2\cdot|AC|^2-|AB|^2\cdot|AC|^2\cdot\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2\cdot|AC|^2-(|AB|\cdot|AC|^2\cdot\cos\varphi)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

1.6. Как в рассмотренном примере с помощью координат вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$?



Ответ. Вводя систему координат (см. рис.), найдём координаты нужных точек: $A(a;\ a;\ 0)$, $B_1(a;\ 0;\ a)$, $B(a;\ 0;\ 0)$, $C_1(0;\ 0;\ a)$. Затем найдём координаты направляющих векторов заданных прямых: $\overrightarrow{AB_1}=(0;\ -a;\ a)$, $BC_1=(-a;\ 0;\ a)$. Если обозначить через φ угол между прямыми AB_1 и BC_1, то $\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AB}_1\cdot\overrightarrow{BC}_1|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}_1|}=$ $=\frac{a^2}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, откуда $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

1.7. Как доказать, что в кубе диагонали AC_1 и BD_1 не перпендикулярны?

Ответ. Если вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$, то получится число, не равное нулю. Отсюда следует, что косинус угла между этими векторами не равен нулю, а поэтому и угол между ними не прямой.

1.8.* Как доказать, что в пирамиде $ABCD$ рёбра CD и AB перпендикулярны, если известно, что равны рёбра AC и BC и равны углы ACD и BCD?

Ответ. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$. Тогда по условию $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$, откуда $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a}$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{m}=\vec{b}\cdot\vec{m}-\vec{a}\cdot\vec{m}=0$. Отсюда следует, что косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен нулю, а поэтому $AB\perp CD$.

Указания к решению наиболее трудных задач

6.* Пусть $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=14$, $|\vec{a}-\vec{b}|=22$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Указание. Из условия $|\vec{a}-\vec{b}|=22$ имеем $(\vec{a}-\vec{b})^2=22^2$ или $\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=22^2$, $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=22^2$, откуда $2\vec{a}\cdot\vec{b}=$

$= 13^2 + 14^2 - 22^2$. Поэтому $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 14^2 - 22^2 = 246$, откуда $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{246}$.

7.* Пусть $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 11$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. Найдите $|\vec{b}|$.

Указание. Из условия имеем $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 11^2$, $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 7^2$ или $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 11^2$, $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7^2$. Складывая по частям, получим $2 \cdot |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{b}|^2 = 11^2 + 7^2$, откуда $|\vec{b}| = 7$.

11. Найдите угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{c}$, если $\vec{a} = (-1; 1; -1)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (-2; 1; 3)$.

Указание. Сначала находим: $\vec{a}^{\,2} = 3$, $\vec{b}^{\,2} = 9$, $\vec{c}^{\,2} = 14$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$. Далее вычисляем: $\vec{m}^{\,2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 9 - 10 = 2$; $\vec{n}^{\,2} = (2\vec{a} - \vec{c})^2 = 4\vec{a}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} - 4\vec{a} \cdot \vec{c} = 12 + 14 = 26$; $\vec{m} \cdot \vec{n} = 2\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 6 - 10 - 1 = -5$. Отсюда если φ — угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, то $\cos\varphi = -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$.

12. Даны точки $A(-1; -2; 4)$, $B(3; 2; -2)$, $C(3; -2; 1)$. Найдите: а) стороны и углы треугольника ABC; б) медианы треугольника ABC.

Указание. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4; 4; -6)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (4; 0; -3)$. Тогда $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, и если AM, BN, CK — медианы треугольника ABC, то $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$. После этого нахождение длин сторон, медиан и косинусов углов треугольника сводится к вычислению скалярных произведений векторов.

16. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ длины 3, перпендикулярного вектору $(-1; 2; 2)$ и образующего равные углы с векторами $(1; 0; 0)$ и $(0; 1; 0)$.

Указание. Пусть $\vec{a} = (m; n; k)$, причём $m^2 + n^2 + k^2 = 9$. Из условия следует, что $-m + 2n + 2k = 0$ и $\dfrac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} = \dfrac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}$, откуда $n = m$ и $k = -\dfrac{1}{2}m$. В результате получим бесконечное множество ненулевых коллинеарных между собой векторов, из которых длину 3 имеют векторы $(2; 2; -1)$ и $(-2; -2; 1)$.

20.** Какой наименьший угол могут образовать два вектора вида:

а) $(2; 5x + 1; 1)$ и $(4x + 2; -1; 1 - 3x)$;

б) $(1 - 5x; 1; 3)$ и $(-1; 1 + 4x; 3 - 3x)$?

Указание. Рассмотрим, например, вторую из этих задач. Пусть $\vec{m} = (1-5x;\ 1;\ 3)$, $\vec{n} = (-1;\ 1+4x;\ 3-3x)$, φ — угол между этими векторами. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{9}{15x^2-10x+11}$. Наименьшему углу соответствует наибольшее значение косинуса, что получается тогда, когда знаменатель полученной дроби наименьший.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. При каких x, y вектор $(x;\ 7;\ -2)$ коллинеарен вектору $(2;\ y;\ 4)$?

1) $x = 1,\ y = 14$ 2) $x = -1,\ y = 14$
3) $x = 1,\ y = -14$ 4) $x = -1,\ y = -14$

Указание. Должно выполняться соотношение $\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{y} = \dfrac{-2}{4}$.

1.4. Найдите, при каком α угол между векторами $\left(\alpha;\ 1;\ \sqrt{\dfrac{24}{5}}\right)$ и $(3;\ 1;\ 0)$ равен $\dfrac{\pi}{4}$.

1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

Указание. Число α должно быть корнем уравнения $3\alpha + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\alpha^2 + \dfrac{29}{5}}\cdot\sqrt{10}$.

2.2.* Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы. Для каких из приведённых выражений результатами вычислений являются числа?

1) $(\vec{a}+\vec{b})^2\cdot\vec{c}$ 2) $(\vec{a}+\vec{b})^2 + |\vec{c}|$
3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})$ 4) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$

Указание. Обозначение $(\vec{a}+\vec{b})^2$ является сокращённой записью скалярного квадрата вектора, и значением это выражения является число. Аналогично числом является и значение выражения $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

2.4. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, и их длины равны. Какие из указанных пар векторов перпендикулярны?

1) $\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}+\vec{b}$ 2) $3\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+3\vec{b}$
3) $4\vec{a}-3\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{b}$ 4) $2\vec{a}+3\vec{b},\ 3\vec{a}-6\vec{b}$

Указание. Из условия следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$. С учётом этого вычислить скалярные произведения пар векторов, указанных в вариантах, и отобрать те варианты, в которых скалярное произведение равно нулю.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Цель параграфа — изучить уравнение плоскости и вывод уравнения плоскости в прямоугольной системе координат с помощью скалярного произведения, установить геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости, выработать навыки составления уравнений плоскостей.

Особенности параграфа. Параграф в основном предназначен для выработки технических навыков по составлению уравнений плоскости и нахождению координат точки пересечения прямой с плоскостью. Все необходимые приёмы рассматриваются в тексте параграфа на примерах. Предлагаемые задачи в основном несложные и рассчитаны на практическое усвоение изучаемого материала. На третьем уровне рассматривается нормальное уравнение плоскости, что позволяет сопоставить коэффициентам уравнения дополнительный геометрический смысл.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: прямоугольная система координат и векторы в пространстве; операции над векторами, скалярное произведение векторов, разложение вектора пространства по трём составляющим; параметрическое задание прямой.

Новые математические понятия и свойства: уравнение плоскости; геометрический смысл коэффициентов уравнения плоскости в прямоугольной системе координат.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Как доказать, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вектор $\overrightarrow{AA_1}$ является нормалью к плоскости $ABCD$?

Ответ. Поскольку прямая AA_1 перпендикулярна прямым AB и AD, то $AA_1 \perp ABCD$. Поэтому для любых двух различных точек M и N плоскости $ABCD$ прямая MN перпендикулярна прямой AA_1, откуда $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{MN}$, а поэтому по определению $\overrightarrow{AA_1} \perp ABCD$.

2.2.* Как доказать, что если $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$, то для каждого $t \neq 0$ вектор $t \cdot \overrightarrow{AB}$ также перпендикулярен плоскости α?

Ответ. Пусть M, N — произвольные различные точки плоскости α. Тогда $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MN}$, откуда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $(t \cdot \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, $t \cdot \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MN}$, а поэтому по определению $t \cdot \overrightarrow{AB} \perp \alpha$.

2.3. Как доказать, что уравнения $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y + 3z - \frac{9}{2} = 0$ и $5x - 7y + 6z - 9 = 0$ задают одну и ту же плоскость?

Ответ. При умножении обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число получается уравнение, равносильное исходному. В данном случае второе уравнение получается из первого умножением обоих частей на число 2.

2.4. Как найти координаты какой-нибудь точки плоскости с уравнением $2y - 3z = 5$?

Ответ. Так как в уравнении коэффициент при переменной y не равен нулю, то можно выбрать любые значения для x и для z, а затем вычислить соответствующее значение для y. Например, если взять $x_1 = 10$, $z_1 = 1$, то получим $y_1 = 4$.

2.5. Как доказать, что плоскости с уравнениями $x - 2y + 3z = 1$ и $2x - 4y + 6z = 1$ параллельны?

Ответ. Плоскости параллельны, так как они перпендикулярны одной и той же прямой.

2.6. Какие координаты имеет точка пересечения плоскости α с прямой CD?

Ответ. В пункте найдено, что плоскость α имеет уравнение $-x + 3y + 4z - \frac{7}{2} = 0$, а также что $C(-1;\ 1;\ 0)$, $D(1;\ 1;\ 0)$. Пусть точка F пересечения прямой CD с плоскостью α. Тогда координаты точки F есть координаты вектора $\overrightarrow{HF}$, где H — начало координат. Далее имеем: $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{HC} + t \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HC} + t \cdot (\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HC}) = (-1;\ 1;\ 0) + t \cdot (2;\ 0;\ 0) = (2t-1;\ 1;\ 0)$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α, получим $(-1) \cdot (2t-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0$, откуда $t = \frac{1}{4}$ и $F\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)$.

Решение упрощается, если сразу заметить, что $F(p;\ 1;\ 0)$, где p — неизвестное число.

2.7.* Какие координаты имеет точка пересечения плоскости α с ребром CC_1?

Ответ. В пункте найдено, что плоскость α имеет уравнение $2x - 2z - a = 0$. Так как все точки прямой CC_1 имеют координаты $(0;\ a;\ t)$, где t — параметр, то для точки пересечения получим уравнение $2 \cdot 0 - 2t - a = 0$, откуда $t = -\frac{1}{2}a$, и точка пересечения имеет координаты $\left(0;\ a;\ -\frac{1}{2}a\right)$.

2.8.** Как записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, сумма квадратов коэффициентов которого при x, y, z равна 1?

Ответ. Уравнение заданной плоскости можно записать в виде $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$, где α, β, γ — углы, которые нормаль к плоскости образует с положительными лучами координатных осей.

Указания к решению наиболее трудных задач

5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и B параллельно прямой CD, если:

а) $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ -2)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 1)$;
б) $A(1;\ 0;\ -1)$, $B(1;\ 4;\ -3)$, $C(2;\ 1;\ 4)$, $D(3;\ 2;\ 2)$;
в) $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(-1;\ -1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 1)$, $D(1;\ -1;\ 2)$;
г) $A(2;\ 1;\ -2)$, $B(2;\ 1;\ -2)$, $C(2;\ 1;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ 3)$.

Указание. Условие параллельности плоскости и прямой равносильно тому, что нормаль к плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой.

7.* Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно прямым BC и MN, если:

а) $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 2;\ 3)$, $M(-1;\ 0;\ 1)$, $N(-1;\ 1;\ 4)$;
б) $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(0;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $M(0;\ 1;\ 1)$, $N(4;\ 4;\ 1)$.

Указание. Условие параллельности плоскости и прямой равносильно тому, что нормаль к плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Какая из указанных плоскостей параллельна прямой, проходящей через точки $A(4;\ -3;\ -1)$, $B(3;\ -4;\ -2)$?

1) $2x + y + 3z - 2 = 0$
2) $x + 2y + z - 4 = 0$
3) $x + y + z + 3 = 0$
4) $3x - y - 2z - 1 = 0$

Указание. Условие параллельности плоскости и прямой равносильно тому, что нормаль к плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой.

1.4.* Какая из указанных плоскостей не пересекается с прямой, которая в параметрической форме имеет вид: $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 4 - t$?

1) $x - y + z = 6$　　2) $x + y + z = 4$
3) $x - y - z = 8$　　4) $x + y - z = 10$

Указание. Прежде всего, нормаль к плоскости должна быть перпендикулярна направляющему вектору прямой. Далее, точка с координатами (1; 3; −1) не должна принадлежать плоскости.

2.2. В прямоугольной системе координат с началом O задана плоскость с уравнением $x + 5y - 3z + 1 = 0$. Для каких из указанных точек M отрезок OM пересекает эту плоскость?

1) $M(2; 1; 3)$　　2) $M(-3; 2; -1)$
3) $M(-1; -2; -4)$　　4) $M(5; -1; 2)$

Указание. При подстановке в уравнение координат точки должно получаться отрицательное число.

§ 3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель параграфа — рассмотреть вычисление углов между скрещивающимися прямыми с помощью координат.

Особенности параграфа. Изучение материала параграфа в значительной степени зависит от правильного представления смысла равенства векторов и умения вычислять координаты векторов, связанных с разными точками. В остальном особых проблем с вычислением углов между прямыми обычно не возникает, так как всё сводится к применению одной формулы.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: геометрический смысл скалярного произведения векторов; равенство векторов; координаты вектора.

Новые математические понятия и свойства: формула косинуса угла между скрещивающимися прямыми.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Какие углы образует вектор $\vec{a} = (3; 4; 5)$ с единичными векторами $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$ координатных осей?

Ответ. Пусть α, β, γ — углы между вектором $\vec{a}$ и векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ соответственно. Тогда $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{3}{2\sqrt{15}}$,

$\cos\beta = \dfrac{4}{2\sqrt{15}} = \dfrac{2}{\sqrt{15}}$, $\cos\gamma = \dfrac{5}{2\sqrt{15}}$. Поэтому $\alpha = \arccos\dfrac{3}{2\sqrt{15}}$, $\beta = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{15}}$, $\gamma = \arccos\dfrac{5}{2\sqrt{15}}$.

3.2. Как объяснить, что косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых?

Ответ. Величина угла между пересекающимися прямыми определяется как величина наименьшего из углов, образуемых при пересечении прямых. Когда косинус угла между направляющими векторами неотрицательный, то угол между прямыми равен углу между направляющими векторами, а когда косинус угла между направляющими векторами отрицательный, то угол между прямыми равен углу, смежному с углом между направляющими векторами.

3.3.* Как изменится решение этой задачи, если ввести систему координат с началом в середине H ребра AB и осями HC, HB, HH_1, где H_1 — середина ребра A_1B_1 (рис. 1)?

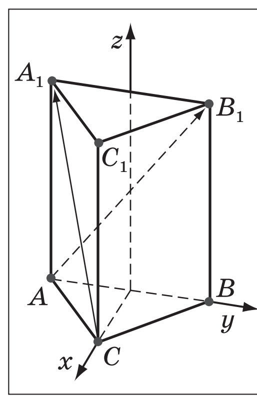


Рис. 1

Ответ. В этом случае вершины призмы имеют следующие координаты: $A\left(0;\ -\dfrac{a}{2};\ 0\right)$, $B\left(0;\ \dfrac{a}{2};\ 0\right)$, $C\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ 0;\ 0\right)$, $A_1\left(0; -\dfrac{a}{2}; h\right)$, $B_1\left(0; \dfrac{a}{2}; h\right)$, $C_1\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; h\right)$.

Отсюда $\vec{m} = \overrightarrow{AB_1} = (0;\ a;\ h)$, $\vec{n} = \overrightarrow{CA_1} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a}{2}; h\right)$. Поэтому $\vec{m}\cdot\vec{n} = -\dfrac{a^2}{2} + h^2 = 0$, откуда $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, а векторы $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ перпендикулярны.

Указание. Из условия перпендикулярности векторов $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ следует, что $2(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - 3\vec{b}) = 0$ или $2\vec{a}^2 - 3\vec{b}^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, откуда, с учётом условия $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, получим $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2$. Поэтому если φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}|^2} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

5.* Вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - 5\vec{b}$, а вектор $\vec{a} + 4\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a} - 3\vec{b}$. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание. Из условия следует, что $(\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$, $(\vec{a} + 4\vec{b})\cdot(\vec{a} - 3\vec{b}) = 0$ или $\vec{a}^2 - 15\vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}^2 - 12\vec{b}^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, откуда $\vec{a}^2 = 13\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}^2$.

8.* В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ все рёбра равны. Найдите угол между медианами SK и DL граней ASB и CSD соответственно.

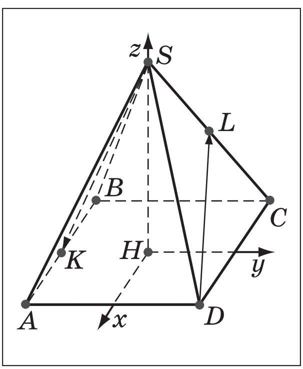


Рис. 2

Указание. Введём систему координат так, как указано на рис. 2. Вычислив через ребро a основания длину высоты пирамиды, получим координаты всех вершин: $A\left(\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $D\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{2}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Затем находим: $K\left(-\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$, $L\left(-\dfrac{a}{4}; \dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, $\overrightarrow{KS} = \left(\dfrac{a}{2}; 0; \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{LD} = \left(\dfrac{3a}{4}; \dfrac{a}{4}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

Далее, если φ — угол между прямыми SK и DL, то $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{LD}}{|\overrightarrow{KC}|\cdot|\overrightarrow{LD}|} = \dfrac{1}{6}$.

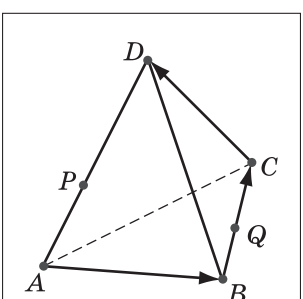


Рис. 3

10.** В пирамиде $ABCD$ точки P и Q лежат на рёбрах AD и BC так, что $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми AB и DC, если известно, что $AB = DC = 2PQ$.

Указание. Для решения задачи введём векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{m} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{m} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{m} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{m}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. Из условия следует, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ и $\vec{a}^2 = 4 \cdot \overrightarrow{PQ}^2 = \frac{16}{9}\vec{a}^2 + \frac{4}{9}\vec{b}^2 - \frac{16}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}$. Отсюда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{11}{16}\vec{a}^2$. Далее, если φ — угол между прямыми AB и CD, то $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right| = \frac{11}{16}$.

Аналогично можно решить задачи 11** и 12**.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Чему равен косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 0{,}5 \cdot |\vec{b}|$, а векторы $3\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$ перпендикулярны?

1) $-\frac{1}{2}$ 2) 0 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

Указание. Условие перпендикулярности данных векторов позволяет выразить скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ через длину вектора $\vec{b}$.

2.2. Какие из указанных величин могут быть значениями углов между двумя векторами?

1) $-45°$ 2) $(30\sqrt{2})°$ 3) $180°$ 4) $(300\sqrt{2})°$

Указание. Величина угла между векторами принадлежит промежутку $[0° ; 180°]$.

2.3. Какие из приведённых значений равны косинусам некоторых углов, которые образует с координатными осями вектор $\vec{a} = (2; -1; -2)$?

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $-\frac{2}{3}$

Указание. Длина заданного вектора $\vec{a}$ равна 3, а направляющие векторы координатных осей следующие: (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

§ 4. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Цель параграфа — рассмотреть вычисление углов между плоскостями с помощью координат.

Особенности параграфа. Вывод формулы косинуса угла между плоскостями основывается на понятиях линейного угла и нормалей к граням двугранного угла. Поэтому при изучении теоретического материала следует напомнить смысл этих понятий, разобраться с особенностями приведённого доказательства основной формулы. Дальнейшая работа сводится к выработке технических навыков, связанных с применением этой формулы.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: определение двугранного угла; линейный угол двугранного угла; угол между плоскостями; нормаль к плоскости.

Новые математические понятия и свойства: формула косинуса угла между плоскостями.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Как определяются двугранный угол и линейный угол двугранного угла?

Ответ. Двугранным углом называется пространственная фигура, образованная двумя различными полуплоскостями с общей границей.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя лучами с общим началом, которые лежат в гранях двугранного угла и перпендикулярны ребру.

4.2. Как найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $3x - y + 1 = 0$ и $2x + z - 1 = 0$?

Ответ. Получается такой же угол, как и в примере из пункта, так как векторы нормалей к плоскостям остаются прежними.

4.3. Как объяснить, что условие перпендикулярности плоскостей не зависит от коэффициентов d_1 и d_2?

Ответ. Изменение только свободного члена в уравнении плоскости соответствует замене плоскости на параллельную ей плоскость. Из курса стереометрии известно, что если две плоскости соответственно параллельны двум перпендикулярным плоскостям, то такие плоскости также перпендикулярны.

4.4. Как составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки $M(1; 1; 1)$ и $N(2; 2; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + y - z - 1 = 0$?

Ответ. Если ищем уравнение плоскости в виде $ax + by + cz + d = 0$, то из условия следует, что $a + b + c + d = 0$, $2a + 2b + 2c + d = 0$, $a + b - c = 0$. Одно из решений этой системы приводит к уравнению $x - y = 0$.

4.5. Чему равен двугранный угол при ребре SB у пирамиды из рассмотренного примера?

Ответ. В пункте был получен результат, что угол между плоскостями SAB и SBC равен $\arccos\frac{9}{13}$. Однако линейный угол двугранного угла при ребре SB больше прямого, и поэтому равен $\pi - \arccos\frac{9}{13}$.

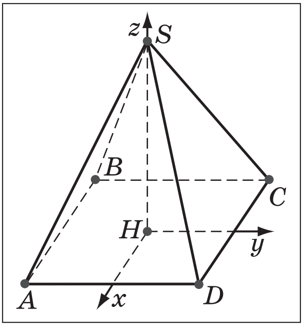


Рис. 1

Указания к решению наиболее трудных задач

7*. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA| = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.

Указание. Введём систему координат так, как указано на рис. 2. Тогда $A(0;\ 0;\ 0)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0\right)$, $S\ (0;\ 0;\ \sqrt{3})$,

$\overrightarrow{SB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Пусть $\vec{m} = (a;\ b;\ c)$, $\vec{n} = (p;\ q;\ r)$ — векторы нормалей к плоскостям α и β и φ — угол между α и β. Тогда из условия параллельности плоскости α прямым SB и AC следует, что $\vec{m} \cdot \overrightarrow{SB} = 0$ и $\vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{3}c = 0$, $\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 0$. Если выбрать $a = 1$, то $b = \sqrt{3}$, $c = 1$, откуда $\vec{m} = (1;\ \sqrt{3};\ 1)$. Аналогично можно получить, что $\vec{n} = (1;\ -\sqrt{3};\ 1)$. После этого находим косинус угла между плоскостями α и β: $\cos\varphi = \left|\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}\right| = \frac{1}{5}$.

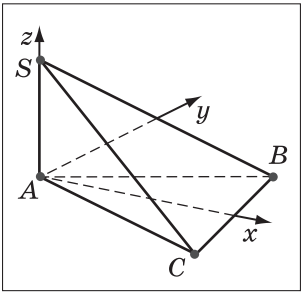


Рис. 2

Аналогично решается задача 8*.

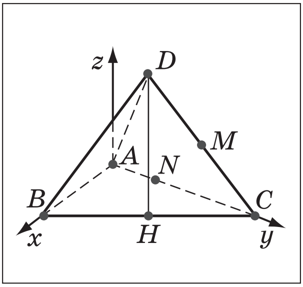


Рис. 3

13.** В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC, равной единице, и углом ABC, равным 60°. Длины рёбер AD, BD, CD равны $\frac{\sqrt{13}}{4}$, точка M — середина CD. Через прямую BM под углом 45° к плоскости ABC проведена плоскость, пересекающая ребро AC в некоторой точке N. Найдите отношение $AN : NC$.

Указание. Введём прямоугольную систему координат, как на рис. 3. Из условия равенства боковых рёбер определяем, что основание высоты пирамиды, проведённой из вершины D, совпадает с серединой H гипотенузы BC. Вычислив катеты треугольника ABC и высоту DH, находим координаты точек: $A(0; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $D\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $M\left(\frac{1}{8}; \frac{3\sqrt{3}}{8}; \frac{3}{8}\right)$.

Пусть точка N имеет координаты $(0; m; 0)$. Составляя уравнение плоскости BNM, получаем $2x + \frac{1}{m}y + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{m}\right)z - 1 = 0$, поэтому вектор $\vec{p} = (2m; 1; 2m - \sqrt{3})$ является нормалью к плоскости BNM. Вектор $\vec{q} = (0; 0; 1)$ является нормалью к плоскости ABC. По условию $\left|\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $\frac{|2m - \sqrt{3}|}{\sqrt{8m^2 - 4m\sqrt{3} + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда $(2m - \sqrt{3})^2 = 2(2m^2 - m\sqrt{3} + 1)$, $m = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $AN : NC = 1 : 2$.

14.* В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$. Длины всех боковых рёбер равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

Указание. Введём систему координат, как на рис. 4. Вычислив высоту пирамиды, найдём координаты точек: $A(2;\ -1;\ 0)$, $B(-2;\ -1;\ 0)$, $C(-2;\ 1;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 2)$, $M\left(1;\ -\frac{1}{2};\ 1\right)$. Составляя уравнение плоскости SAC, получим уравнение плоскости $x + 2y = 0$ и вектор нормали $\vec{p} = (1;\ 2;\ 0)$. Для получения второй плоскости β сначала находим вектор $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 0)$. Далее ищем уравнение плоскости β в виде $ax + by + cz + d = 0$. Поскольку $\beta \parallel AC$, то $(a; b; c) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, то есть $-4a + 2b = 0$. Из условий, что плоскость β содержит точки B и M, приходим к уравнениям: $-2a - b + d = 0$, $a - \frac{1}{2}b + c + d = 0$. Решая полученную систему, находим уравнение $x + 2y - 4z + 4 = 0$ плоскости β и вектор нормали $\vec{q} = (1;\ 2;\ -4)$. В итоге если φ — угол между плоскостями, то $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{21}} = \sqrt{\dfrac{5}{21}}$.

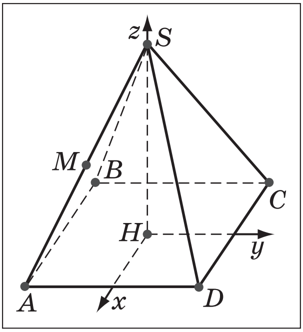


Рис. 4

Аналогично можно решить задачу 15**.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. При каком значении m плоскость $5x + my + 3z - 2 = 0$ перпендикулярна плоскости $-x - 2y + 3z - 4 = 0$?

1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

Указание. Векторы $(5;\ m;\ 3)$ и $(-1;\ -2;\ 3)$ должны быть перпендикулярными.

1.4. Чему равен угол между плоскостью Oxz и плоскостью, заданной уравнением $\sqrt{3}x - 2y + z + 5 = 0$?

1) 30° 2) 45° 3) 135° 4) 150°

Указание. Вектор $(0;\ 1;\ 0)$ является нормалью к плоскости Oxz.

2.3. При каких значениях m плоскости с уравнениями $mx - 4y + 3z + 1 = 0$ и $mx + y + mz + 2 = 0$ перпендикулярны?

1) 30° 2) 45° 3) 135° 4) 150°

Указание. Векторы $(m;\ -4;\ 3)$ и $(m;\ 1;\ m)$ должны быть перпендикулярными.

§ 5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Цель параграфа — рассмотреть вычисление угла между прямой и плоскостью с помощью координат.

Особенности параграфа. Работа с материалом данного параграфа в значительной степени аналогична работе с предыдущим параграфом. Особое внимание следует обратить только на окончательный результат, так как полученная формула, с одной стороны, очень похожа на формулу из предыдущего параграфа, а с другой стороны, сильно отличается, поскольку вместо косинуса вычисляется синус искомого угла.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: определение угла между прямой и плоскостью; геометрический смысл скалярного произведения векторов; равенство векторов.

Новые математические понятия и свойства: формула синуса угла между прямой и плоскостью.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

5.1. Чему равен угол между прямой m и плоскостью α, если угол между нормалью к плоскости α и направляющим вектором прямой m равен $120°$?

Ответ. $30°$.

5.2. Как связаны друг с другом угол между двумя прямыми и угол между направляющими векторами этих прямых?

Ответ. Если угол между направляющими векторами не больше $\frac{\pi}{2}$, то угол между прямыми равен этому углу. Если угол между направляющими векторами больше $\frac{\pi}{2}$, то угол между прямыми равен углу, смежному с найденным углом.

5.3.* В каком отношении плоскость γ делит диагональ BA_1 грани BB_1A_1A?

Ответ. Это отношение равно $BM : A_1B_1$, а в пункте найдено, что точка M является серединой ребра AB. Поэтому искомое отношение равно $1 : 2$.

Указания к решению наиболее трудных задач

5.* В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 1$. Точка M — середина ребра AB. Найдите длину ребра AA_1, если известно, что прямые MC_1 и B_1C образуют равные углы с плоскостью A_1BCD_1.

Указание. Введём систему координат, как на рис. 1. Обозначим AA_1 через h. Тогда $A_1(5;\ 0;\ h)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 1;\ 0)$, $B_1(0;\ 0;\ h)$, $C_1(0;\ 1;\ h)$, $M\left(\frac{5}{2};\ 0;\ -0\right)$, $\overrightarrow{MC_1}=\left(-\frac{5}{2};\ 1;\ h\right)$, $\overrightarrow{B_1C}=(0;\ 1;\ -h)$. Составляя уравнение плоскости A_1BCD_1, получим $hx-5z=0$, вектор нормали к плоскости $\vec{p}=(h;\ 0;\ -5)$. Из условия равенства углов между прямыми MC_1 и B_1C с плоскостью A_1BCD_1 составляем уравнение

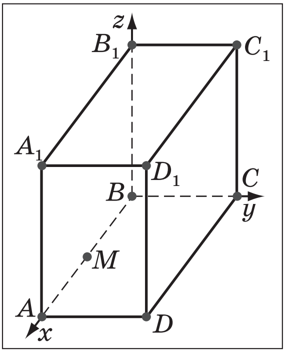


Рис. 1

$$\frac{\left|-\frac{5}{2}h-5h\right|}{\sqrt{\frac{25}{4}+1+h^2}\cdot\sqrt{h^2+25}}=\frac{|5h|}{\sqrt{1+h^2}\cdot\sqrt{h^2+25}},$$

откуда $3\sqrt{1+h^2}=2\sqrt{\frac{29}{4}+h^2}$, $9+9h^2=29+4h^2$, $h=2$.

6. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины рёбер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Найдите величину угла между прямой l и плоскостью грани ABC.

Указание. Введём систему координат, как на рис. 2. Полагая ребро тетраэдра равным a, найдём координаты точек: $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\ -\frac{a}{2};\ 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right)$, $S\left(0;\ 0;\ \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$, $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0;\ 0\right)$, $K\left(\frac{a\sqrt{3}}{12};\ -\frac{a}{4};\ \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$, $L\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0;\ \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$. Составляя уравнения плоскостей SCM и BKL, получим $y=0$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{5\sqrt{6}}{4}z-a=0$. Далее найдём координаты двух общих точек этих плоскостей как решения системы, составленной из уравнений плоскостей. Полагая $y_1=0$, $z_1=0$, получим $x_1=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ и в итоге найдём об-

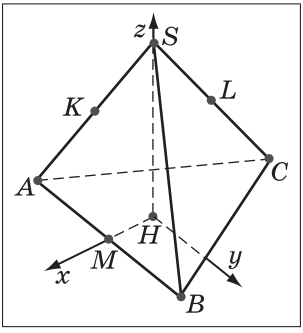


Рис. 2

щую точку $E\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right)$. Полагая $y_2 = 0$, $x_2 = 0$, получим $z_2 = \frac{2a\sqrt{6}}{15}$ и найдём другую общую точку $F\left(0;\ 0;\ \frac{2a\sqrt{6}}{15}\right)$. Вектор $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{2a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ \frac{2a\sqrt{6}}{15}\right)$ будет направляющим вектором прямой пересечения плоскостей, вектор $\vec{n} = (0;\ 0;\ 1)$ — нормалью к плоскости ABC. При вычислении угла φ между прямой EF и плоскостью ABC вектор $\overrightarrow{EF}$ можно заменить на коллинеарный ему вектор $\vec{m} = (5;\ 0;\ -\sqrt{2})$. В итоге получим, что $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

Аналогично можно решить задачи 7* и 8*.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Какая из указанных плоскостей составляет наибольший угол с вектором $(1;\ -3;\ 2)$?

1) $x - y + z - 1 = 0$ 2) $x + 2y + z - 2 = 0$

3) $x + y + 2z - 3 = 0$ 4) $x + 2y - z - 4 = 0$

Указание. Модуль синуса угла между вектором и нормалью к плоскости должен быть наибольшим.

1.4. Какой из перечисленных ниже векторов составляет наименьший угол с плоскостью $x + y + z - 2 = 0$?

1) $\vec{n} = (1;\ 2;\ 3)$ 2) $\vec{n} = (-1;\ 2;\ 3)$

3) $\vec{n} = (1;\ -2;\ 3)$ 4) $\vec{n} = (1;\ 2;\ -3)$

Указание. Модуль синуса угла между вектором и нормалью к плоскости должен быть наименьшим.

2.4. Дана правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны между собой. Какие из перечисленных значений может принимать синус угла между некоторым ребром пирамиды и некоторой её гранью?

1) 0 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 4) $\frac{1}{2}$

Указание. Вариант 1, в котором записано число 0, нужно включить в ответ по той причине, что угол между плоскостью и прямой этой плоскости по определению равен 0. Далее для пирамиды $SABCD$ с вершиной S нужно найти величину углов между прямой AB и плоскостью SAD, между прямой SA и плоскостью $ABCD$, между прямой SA и плоскостью SCD.

§ 6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Цель параграфа — рассмотреть вычисление расстояния от точки до плоскости с помощью координат.

Особенности параграфа. Получение формулы расстояния от точки до плоскости в прямоугольной системе координат основывается на естественном процессе построения перпендикуляра к плоскости и вычислении расстояния от заданной точки до основания перпендикуляра. После того как основная формула изучена, дальнейшая работа во многом аналогична работе с предыдущими параграфами. На втором уровне рассматривается один из способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, когда через эти прямые проводятся две параллельные плоскости.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: перпендикулярность прямой и плоскости; уравнение плоскости; геометрический смысл скалярного произведения векторов; параметрическое задание прямой.

Новые математические понятия и свойства: формула расстояния от точки до плоскости.

Вспомогательные математические понятия и свойства: вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

6.1. К чему приводит полученная формула, когда точка A лежит на плоскости α?

Ответ. Получится число, равное нулю, и это соответствует тому, что расстояние от точки плоскости до этой плоскости равно нулю.

6.2.* Как в рассмотренном примере найти уравнение плоскости β, которая проходит через точки K, L и параллельна прямой A_1C?

Ответ. В пункте найдено, что уравнение плоскости, которая проходит через точки A_1, C и параллельна прямой KL, имеет вид $2\sqrt{3}x - 18y - 3z + 6 = 0$. Поскольку эта плоскость параллельна плоскости β, то уравнение плоскости β имеет вид $2\sqrt{3}x - 18y - 3z + d = 0$, и число d находим, подставив в это уравнение координаты $\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$ точки K.

Указания к решению наиболее трудных задач

5.* В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$, точка M — середина ребра AB. Боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$. Через прямую DM параллельно SA проходит плоскость α. Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

Указание. Условие параллельности плоскости и прямой равносильно тому, что нормаль к плоскости перпендикулярна направляющему вектору прямой.

9.* В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной длины 2. Длины боковых рёбер AD, BD и CD равны $\sqrt{3}$. Точки K и L — середины AC и BD соответственно. Найдите расстояние между прямыми BK и AL.

Указание. Аналогичная задача рассмотрена в п. 6.2.*

11.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB = 3$, $AD = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 2$. Найдите длину перпендикулярной проекции отрезка C_1D на плоскость B_1CM, где M — середина ребра AD.

Указание. Непосредственное применение координатного метода к этой задаче может оказаться очень трудоёмким делом. Поэтому предварительно следует обратить внимание на особенности задачи: заметить, что длины проекций равных и параллельных отрезков на одну плоскость равны. Поэтому в данной задаче удобнее вычислять длину проекции отрезка CD на указанную плоскость, так как один из концов отрезка находится в плоскости. Далее, если вычислить расстояние от другого конца отрезка до плоскости и знать длину отрезка, то длина проекции находится с помощью теоремы Пифагора. С учётом указанных особенностей дальнейшее применение метода координат очень удобно.

12.* В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, острый угол A которого имеет величину $60°$, длины сторон AB и BC равны соответственно a и $2a$. Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, их длина равна a. Через вершины A, B_1 и D_1 параллелепипеда проведена плоскость. Найдите расстояние от вершины C до этой плоскости.

Указание. Решение можно значительно упростить, если заметить, что $AB \perp BD$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Расстояние от какой из перечисленных ниже точек до плоскости $3x - 4y - 3z + 1 = 0$ минимально?

1) $A(1; 1; 2)$ 2) $B(-1; 1; 2)$
3) $C(1; -1; 2)$ 4) $D(1; 1; -2)$

Указание. Можно подставлять в правую часть уравнения плоскости координаты точек и найти наименьшее по модулю значение.

1.4.* Рёбра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 2. Чему равно расстояние между прямыми AB_1 и CD?

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) 2 4) $2\sqrt{2}$

Указание. Данные прямые расположены в плоскостях параллельных боковых граней куба.

2.2. При каких значениях a расстояние между параллельными плоскостями $x + y + z + 1 = 0$ и $x + y + z + a = 0$ равно $\sqrt{3}$?

1) $a = 4$ 2) $a = 2$ 3) $a = 0$ 4) $a = -2$

Указание. Должно выполняться условие $|1 - a| = 3$.

2.4.* В пространстве через точку A, которая расположена на расстоянии 3 от заданной прямой m, проводится прямая a. Какие значения из указанных может иметь расстояние между прямыми a и m?

1) $\sqrt{10}$ 2) $\sqrt{10} - 1$ 3) $\sqrt{10} - 2$ 4) $\sqrt{10} - 3$

Указание. Расстояние меньше или равно 3.

§ 7. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Цель параграфа — рассмотреть примеры на применение координатного метода в задачах со сферами.

Особенности параграфа. Использование системы координат в задачах со сферами иногда приводит к громоздким и непростым алгебраическим задачам. Поэтому, прежде чем выбирать координатный подход к решению задачи, целесообразно оценить, какие полезные и не очень сложные соотношения можно записать между неизвестными координатами. Если на предполагаемом пути ожидаются сложные соотношения, то следует подумать о других способах решения.

Возможности в применении координатного метода к задачам со сферами основываются на следующих закономерностях, которые удаётся записать с помощью координат. Первое: если сфера проходит через заданную точку, то расстояние от этой точки до центра сферы равно радиусу, что можно записать с помощью формулы расстояния между точками. Второе: если сфера касается плоскости, то расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу, и это можно записать с помощью соответствующей формулы расстояния от точки до плоскости. Третье: если сфера касается прямой, то отрезок, соединяющий точку касания с центром сферы, перпендикулярен к прямой, что можно записать с помощью скалярного произведения векторов.

На первом уровне изучение материала ограничивается уравнением сферы. На третьем уровне рассматривается применение координат в задачах со сферами, касающимися плоскостей.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

7.1. Чему равен радиус и каковы координаты центра сферы с уравнением $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 5$?

Ответ. Центр $O(-2; -3; -4)$, радиус $R = \sqrt{5}$.

7.2.** Как с помощью векторов можно вычислить площадь четырёхугольника?

Ответ. Площадь четырёхугольника $ABCD$ можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC}^2 \cdot \overrightarrow{BD}^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD})^2}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

4.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M лежит на луче CA, $CM = 2\sqrt{2}$. Точки P и Q — середины рёбер D_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M, A, P, Q.

Указание. При введении неизвестных координат центра сферы и её радиуса из условия того, что сфера проходит через четыре точки, можно составить систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными, но при вычитании каждых двух уравнений получаются линейные уравнения с тремя неизвестными.

6.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, которая касается граней $ABCD$, AA_1B_1B, AA_1D_1D и проходит через середину ребра CC_1.

Указание. Решение упростится, если показать, что центр сферы находится на луче AC_1.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4.** Чему равно наименьшее расстояние от точек сферы с уравнением $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$ до плоскости $x + 2y - 2z + 1 = 0$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Указание. Нужно из расстояния от центра сферы до плоскости вычесть радиус сферы.

2.2. Укажите из перечисленных уравнений те, которые задают сферы, касающиеся плоскости $x + y + z = 3$.

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

3) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 3$

4) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 12$

Указание. Расстояние от центра сферы до плоскости должно быть равным радиусу сферы.

2.4. Выберите из перечисленных точек те, которые лежат внутри сферы $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 8$.

1) $(-1; 0; 1)$ 2) $(1; -2; 3)$

2) 3) $(1; -1; 5)$ 4) $(1; 2; 1)$

Указание. Найти расстояния от заданных в вариантах точек до центра сферы и сравнить с радиусом.

Глава 7
УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ

Цель главы — ознакомиться с простейшими дифференциальными уравнениями, с первообразными и неопределёнными интегралами, рассмотреть правила нахождения первообразных и некоторые способы решения дифференциальных уравнений.

Особенности главы. Многие задачи естествознания и других областей приводят к уравнениям, содержащим неизвестную функцию и её производные. Такие уравнения называются дифференциальными.

Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид $F'(x) = f(x)$, где f — известная, а F — неизвестная функции. Тем не менее именно к решению таких простейших уравнений приводят в конечном счёте все приёмы решения уравнений более общего вида. Поэтому начинать учиться решению дифференциальных уравнений нужно с уравнения $F'(x) = f(x)$. Эта задача важна ещё и потому, что она приводит к операции, обратной дифференцированию. Такую операцию, имеющую фундаментальное значение в математике и её приложениях, называют интегрированием.

В первом параграфе рассмотрение простейших дифференциальных уравнений приводит к понятиям первообразной и неопределённого интеграла. Приводится таблица первообразных для основных элементарных функций. Во втором параграфе изучаются простейшие правила нахождения первообразных и неопределённых интегралов. В третьем параграфе рассматриваются примеры дифференциальных уравнений и их использования при решении некоторых практических задач.

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

Цель параграфа. Рассмотреть понятия первообразной и неопределённого интеграла, изучить таблицу первообразных основных элементарных функций.

Особенности параграфа. Функция $F(x)$, удовлетворяющая уравнению $F'(x) = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$, называется первообразной для $f(x)$ на данном промежутке. Следует отметить, что первообразные существуют не для всякой функции $f(x)$. Задача об отыскании первообразных, как правило, более сложна, чем вычисление производных. Она с трудом даётся даже некоторым студентам математических факультетов.

Прежде всего заметим, что если у функции $f(x)$ есть первообразная $F(x)$ на некотором интервале $(a;\ b)$, то эта первообразная не единственна. Функция $F(x) + C$, где C — любая постоянная величина, также будет первообразной для $f(x)$ на данном интервале. Важнейшим фактом является то обстоятельство, что других первообразных у функции $f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$ нет. Иными словами, формулой $F(x) + C$ исчерпывается множество первообразных для $f(x)$ на данном интервале. Это множество называют неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Важно отметить, что если речь идёт не об одном интервале $(a;\ b)$, а о множествах более сложной структуры, то формулой $F(x) + C$ уже не исчерпывается совокупность всех первообразных (см. об этом пункт 1.4**). Таблицу первообразных из пункта 1.5 следует понимать с учётом данного замечания.

Вопросы ко многим пунктам этого параграфа рассчитаны на проверку одного из основных определений — как проверить, что та или иная функция имеет указанную первообразную. Эта проверка осуществляется по определению — дифференцированием. Задачи к параграфу также несложные и рассчитаны на непосредственное применение определений.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: производная функции; таблица производных; теорема Лагранжа и следствия из неё.

Новые математические понятия: первообразная; таблица первообразных; неопределённый интеграл.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Как проверить, что функция $F(x) = \frac{x^5}{5}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^4$ на множестве всех действительных чисел?

Ответ. Найдём производную: $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{5x^4}{5} = x^4$. Так как это равенство справедливо при любом $x \in R$, то по определению функция $\dfrac{x^5}{5}$ будет первообразной для x^4 на множестве R всех действительных чисел.

1.2. Верно ли утверждение, обратное теореме этого пункта?

Ответ. Верно. Пусть $F(x) = C$ на промежутке $(a; b)$. Тогда при всех $x \in (a; b)$ верно равенство $F'(x) = (C)' = 0$.

1.3. Какие первообразные имеет функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0; \infty)$, если известно, что на этом промежутке $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$?

Ответ. $\ln x + C$, где C — произвольная постоянная.

1.4.** Как показать, что функции вида $F(x) = -\dfrac{1}{5x^5} + C$ являются первообразными функции $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$?

Ответ. По определению; для чего вычислим производную: $F'(x) = \left(-\dfrac{1}{5x^5} + C\right)' = \left(-\dfrac{1}{5}x^{-5}\right)' + (C)' = -\dfrac{1}{5} \cdot (-5) \cdot x^{-6} + 0 = \dfrac{1}{x^6}$. Можно отметить, что здесь $x \neq 0$, поэтому мы нашли первообразную не на всей оси, а на каждом из интервалов $(-\infty; 0)$ или $(0; \infty)$ в отдельности.

1.5. Как проверить, что множество $\{\sin x + C$, где $C \in R\}$ есть множество первообразных функции $f(x) = \cos x$?

Ответ. По определению:

$$(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x + 0 = \cos x.$$

1.6.* Как проверить, что $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$?

Ответ. Дифференцируем: $\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)' = 3x^2 \cdot \dfrac{1}{3} + 0 = x^2$. Равенство выполнено при всех $x \in (-\infty; \infty)$. Значит, формула $\dfrac{x^3}{3} + C$ описывает множество всех первообразных для $f(x) = x^2$ на промежутке $(-\infty; \infty)$.

Указания к решению наиболее трудных задач

4. Для функции $f(x)$ найдите такую её первообразную, что график первообразной проходит через заданную точку M, если:

а) $f(x) = x^3$, $M(2; 1)$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $M\left(-\dfrac{1}{2}; 3\right)$;

в) $f(x) = \cos x$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

Указание. Все варианты рассматриваются одинаково, поэтому разберём только случай б). По таблице находим общий вид первообразных данной функции: $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C_1$ при $x \in (-\infty; 0)$; $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C_2$ при $x \in (0; \infty)$. Учитывая, что аргумент заданной точки отрицателен, подставляем вместо x значение абсциссы точки, вместо $F(x)$ значение ординаты точки в первое из выражений для первообразных и получим $3 = -\frac{1}{0{,}5} + C_1$, откуда $C_1 = 5$. В итоге $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 5$ при $x \in (-\infty; 0)$. На промежутке $(0; \infty)$ константу C_2 оставляем произвольной.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Чему равен $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$?

1) $-\mathrm{ctg}x$ 2) $\cos x + C$ 3) $-\mathrm{tg}x + C$ 4) $C - \mathrm{ctg}x$

Указание. Вариант 1 не может быть по определению неопределённого интеграла, варианты 2 и 3 соответствуют некоторым результатам из таблицы первообразных и не подходят. Вычислив производную от функций из варианта 4, получим, что этот вариант следует включить в ответ.

2.3. Какие из равенств являются верными?

1) $\int x dx = x^2 + C$ 2) $\int 3x^3 dx = \frac{4}{3}x^4 + C$

3) $\int \sin x dx = \cos x + C$ 4) $\int \cos x dx = \sin x + C$

Указание. Все варианты сравнить с табличными результатами.

2.4. Какие из указанных функций $F(x)$ являются первообразными функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$?

1) $F(x) = \ln 2x$ 2) $F(x) = 2\ln\sqrt{-x}$

3) $F(x) = -\ln\frac{1}{x}$ 4) $(x) = -\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$

Указание. Варианты 1 и 3 не подходят из-за различия областей определения аргумента, варианты 2 и 4 можно отобрать в ответ, выполнив преобразования с учётом областей изменения аргумента: $2\ln\sqrt{-x} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln|x| = \ln|x|$, $-\ln\left(-\frac{1}{x}\right) = -(-1) \cdot \ln|x| = \ln|x|$.

§ 2. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Цель параграфа — изучить простейшие правила нахождения первообразных и неопределённых интегралов.

Особенности параграфа. Приведённые в этом параграфе правила достаточно просты и понятны. Однако важно отметить, что в каждом из этих правил явно или неявно присутствуют некоторые условия, при нарушении которых правилом пользоваться нельзя. Например, в первом правиле говорится, что $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$. Здесь уже подразумевается, что f и g имеют первообразные. Если этих первообразных вообще нет, то правило не работает, в то время как сумма $f(x) + g(x)$ может всё-таки иметь первообразную! Например, если функция $f(x)$ не имеет первообразной на множестве D и $g(x) \equiv -f(x)$, то сумма $f(x) + g(x)$ тождественно равна нулю, а поэтому имеет первообразные. Далее, при использовании этого правила неявно подразумевается, что речь идёт об одном и том же промежутке изменения аргумента x.

Подобные соображения нужно учитывать и при использовании остальных правил.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: первообразная; таблица первообразных; неопределённый интеграл.

Новые математические понятия: правила нахождения первообразных.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Как найти одну из первообразных функции $h(x) = \cos x + \sin x$?

Ответ. По таблице из пункта 1.5 находим первообразную для каждого слагаемого. Это будут соответственно $\sin x$ и $-\cos x$. Согласно правилу 1, одна из первообразных суммы равна $\sin x + (-\cos x) = \sin x - \cos x$.

2.2. Как найти одну из первообразных функции $h(x) = 2\cos x + 3\sin x$?

Ответ. Первообразные каждого слагаемого легко найти по правилу 2, а первообразную всей суммы — по правилу 1. Решение подобной задачи удобно записывать, обозначая символом интеграла операции вычисления первообразных, как это делается в анализе. Правда, при этом надо не забыть в конце прибавить произвольную постоянную, так как неопределённый интеграл обозначает не какую-то одну, а всю совокупность первообразных. Итак, имеем

$$\int(2\cos x + 3\sin x)dx = \int 2\cos x dx + \int 3\sin x dx =$$

$$= 2\int\cos x dx + 3\int\sin x dx = 2\sin x - 3\cos x + C.$$

2.3. Как найти одну из первообразных функции $h(x) = \cos 2x + \sin 3x$?

Ответ. Первообразная для $\cos x$ равна $\sin x$. По правилу 3 первообразная для $\cos 2x$ равняется $\frac{1}{2}\sin 2x$. Аналогично первообразная для $\sin 3x$ равна $-\frac{1}{3}\cos 3x$. По правилу 1 окончательным ответом будет: $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 3x$.

2.4.** Как доказать, что функция $F(x) = e^{\sin x}$ — первообразная функции $f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$?

Ответ. Воспользуемся определением первообразной. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$, и всё доказано.

Указания к решению наиболее трудных задач

2. Найдите все первообразные заданной функции на соответствующих промежутках области определения:

ё)** $f(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$; ж)** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$;

з)** $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.

Указание. ё) Функция определена при $x \in (0; \infty)$. На этом интервале $f(x) = \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \sin(\ln x) \cdot (\ln x)'$. Положим $g(x) = \ln x$, представим исходную функцию в виде $f(x) = \sin(g(x)) \cdot g'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$, где $h(t) = \sin t$ и воспользуемся правилом 4. Учитывая, что первообразная функции $\sin t$ равна $-\cos t$, придём к заключению, что множество первообразных для $f(x)$ на промежутке $(0; \infty)$ — совокупность всех функций вида $-\cos(\ln x) + C$.

ж) Функция определена на интервалах $I_k = \left(2k\pi - \frac{\pi}{2};\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
Представим её в виде $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' =$
$= -\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$, где $g(x) = \cos x$, $h(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}$, и применим правило 4. Так как первообразная функции $h(t)$ равна $-2\sqrt{t}$, то множество всех первообразных для $f(x)$ на интервале I_k состоит из функций $-2\sqrt{\cos x} + C_k$.

з) Функция определена на объединении интервалов $I_1 = (0; 1)$ и $I_2 = (1; \infty)$. Перепишем её в виде $f(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$
$= \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = h(g(x)) \cdot g'(x)$, где $h(t) = \frac{1}{t}$, $g(x) = \ln x$, и вновь воспользуемся правилом 4. Первообразная функции $h(t)$ равна $\ln|t|$, поэтому на каждом из интервалов I_k множество всех первообразных для $f(x)$ имеет вид $\ln|\ln x| + C_k$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. Какой формулой задаётся множество всех первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$?

1) $-\frac{1}{x} + C$ 2) $\frac{1}{x} + C$ 3) $-\frac{1}{3x^3} + C$ 4) $\frac{3}{x^3} + C$

Указание. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

1.4. Чему равен неопределённый интеграл от функции $f(x) = e^{5x}$?

1) $5e^{5x} + C$ 2) $\frac{1}{5}e^{5x} + C$ 3) $\frac{1}{\ln 5}e^{5x} + C$ 4) $e^{5x} + C$.

Указание. Чтобы найти неопределённый интеграл, нужно воспользоваться правилом замены переменной, выбрав $\varphi(x) = 5x$.

2.1. Какие из приведённых функций являются первообразными функции $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$?

1) $F(x) = \operatorname{arctg} x$ 2) $F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$

3) $F(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcctg} x$ 4) $F(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$

Указание. Воспользоваться таблицей первообразных и соотношением $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

2.4. Какие из формул задают неопределённый интеграл от функции $f(x) = 3\cos 4x$?

1) $-12\sin 4x + C$ 2) $\frac{3}{4}\sin 4x + C$

3) $\frac{1}{12}\sin 4x + C$ 4) $\sin 3x\cos^3 x + \cos 3x\sin^3 x + C$

Указание. С помощью замены переменной можно получить результат из варианта 2. Выполнив преобразования в варианте 4, удаётся получить функции из варианта 2.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ

Цель параграфа — рассмотреть примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, ознакомиться с приёмами решения дифференциальных уравнений, которые основаны на сведении задач к вычислению неопределённых интегралов.

Особенности параграфа. В этом параграфе рассматриваются некоторые практические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, и разбираются методы их решения.

Решение более сложных дифференциальных уравнений осуществляется путём приведения их к простейшему виду с помощью тех или иных искусственных приёмов. Некоторые из таких приёмов описаны в пунктах 3.3–3.7. При этом вновь возникают одна или несколько произвольных постоянных. Однако, как будет показано в параграфе, постоянные могут входить в ответ не обязательно в виде слагаемых. Эти постоянные могут быть, например, коэффициентами при известных функциях, как в примерах из пунктов 3.5, 3.7, или участвовать в записи ответа ещё более сложным образом. Общее положение состоит в том, что для вычисления значений этих постоянных снова необходимы дополнительные условия, доставляемые практическим смыслом решаемых задач.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: первообразная функции; таблица первообразных; неопределённый интеграл.

Новые математические понятия: дифференциальное уравнение; уравнение с разделёнными переменными.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. На каком расстоянии от начальной точки отсчёта будет находиться движущаяся точка из примера 1 через 8 часов?

Ответ. Из полученной при решении формулы $S(t) = 4t + 1$ получим, что $S(t) = 4 \cdot 8 + 1 = 33$ (км).

3.2. Какие решения имеет дифференциальное уравнение $y'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty; 0)$?

Ответ. Рассуждая точно так же, как в тексте данного пункта, приходим к такой же формуле $y = \dfrac{1}{x} + C$, что и на промежутке $(0; \infty)$. Только постоянные C в этих формулах могут выбираться разными.

3.3. В каком месте находилась движущаяся точка в момент времени $t_1 = 1$?

Ответ. Используя найденный в тексте пункта закон движения $S(t) = t^2 - t - 2$, получаем $S(t_1) = -2$. Иными словами, точка располагалась на расстоянии в 2 м от начала отсчёта и по направлению, противоположному направлению ускорения.

3.4.* Как вычислить дальность полёта снаряда?

Ответ. Координаты точки падения снаряда удовлетворяют уравнению $y(x) = 0$, то есть $x \cdot \mathrm{tg} a = \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$, причём $x \neq 0$. Отсюда $2v_0^2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = gx,\ x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. Последнее значение и есть искомая дальность.

3.5.** Через сколько минут после начала охлаждения вода в комнате остынет до 30°?

Ответ. Используя найденный в тексте пункта закон изменения температуры, составляем уравнение $30 = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} + 20$ и получаем $2^{-3} = 2^{-\frac{t}{10}}$, откуда $t = 30$ (мин).

3.6.** Как записать дифференциальное уравнение $xy'(x) = y$ в виде уравнения с разделёнными переменными?

Ответ. Надо записать так: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$. Теперь нетрудно найти и решение данного уравнения: $\ln|y| = \ln|x| + C$, $|y| = e^C|x|$.

Таким образом, для каждого из промежутков $(0; \infty)$ и $(-\infty; 0)$ решениями будут функции вида $y = \pm e^C \cdot x$. Эти решения можно записать короче, если ввести новую произвольную постоянную

$k \neq 0$, связанную с формулой $y = \pm e^C \cdot x$, тогда получим семейство решений $y = kx$.

Отметим, что эти решения удовлетворяют исходному уравнению и в точке $x = 0$, хотя при выводе данной формулы эту точку приходится исключать.

3.7.** Как доказать, что при заданных условиях в случае, когда $k > 0$, скорость $v(t)$ падающего тела не может неограниченно возрастать?

Ответ. Если $k > 0$, то при $t > 0$ имеем $0 < e^{-\frac{kt}{m}} < 1$. Отсюда $|v(t)| = \frac{mg}{k} \cdot |1 - e^{-\frac{kt}{m}}| < \frac{mg}{k}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

2.* Найдите решения дифференциального уравнения $(y')^2 - 5y' + 6 = 0$.

Указание. Решая данное квадратное уравнение, находим, что либо $y' = 2$, либо $y' = 3$. Следовательно, решениями данного дифференциального уравнения являются функции вида $y_1 = 2x + C_1$ или $y_2 = 3x + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

10.** Найдите кривые, для которых угловой коэффициент любой касательной равен ординате точки касания.

Указание. Угловой коэффициент кривой в точке x равен $y'(x)$, значит, должно выполняться уравнение $y'(x) = y(x)$. Его общее решение имеет вид $y(x) = C \cdot e^x$, где C — произвольная постоянная.

11.** Найдите кривые, у которых отрезок любой касательной, заключённый между точкой касания и осью Ox, делится осью Oy пополам.

Указание. Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид $(y - y_0) = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Эта касательная пересекает ось Ox в точке $x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}$. Для того чтобы выполнялось условие задачи, необходимо и достаточно, чтобы $x_0 + x_1 = 0$. Получается $2x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} = 0$.

Можно переписать это соотношение в более привычном виде, если x_0 обозначить переменной и заменить его на более привычную букву x. После преобразований получим дифференциальное уравнение $2xy'(x) = y(x)$.

Решая это уравнение методом разделения переменных, находим $y^2 = |Cx|$, где C — произвольная постоянная, отличная от нуля (см. ответ на вопрос к пункту 3.6**).

12.** Одно тело имеет температуру 200°, а другое — 100°. Через 10 минут остывания этих тел на воздухе с температурой 0° первое тело остыло до температуры 100°, а второе — до 80°. Через сколько минут температуры тел сравняются?

Указание. Как показано в п. 3.5**, закон изменения температуры остывающего тела имеет вид $T(t) = (T(0) - T_C)e^{kt} + T_C$. Здесь $T(0)$ — начальная температура, T_C — температура окружающей среды, k — постоянная. Для первого тела имеем $T_C = 0$, $T_1(0) = 200$, а k найдём из условия $100 = T_1(10) = 200e^{10k}$, $e^{\ln\frac{1}{2}} = e^{10k}$, $k = \frac{1}{10} \cdot \ln\frac{1}{2}$. Аналогично для второго тела $T_C = 0$, $T_2(0) = 100$, $80 = 100 \cdot e^{10k}$, $e^{\ln\frac{4}{5}} = e^{k \cdot 10}$, $k = \frac{1}{10} \cdot \ln\frac{4}{5}$. Температуры сравняются, когда $200 \cdot e^{\frac{1}{10}\ln\frac{1}{2}t} = 100 \cdot e^{\frac{1}{10}\ln\frac{4}{5}t}$, $2 = e^{\frac{1}{10}\left(\ln\frac{4}{5} - \ln\frac{1}{2}\right)\cdot t}$, $10\ln 2 = (3\ln 2 - \ln 5) \cdot t$, $t = \frac{10 \cdot \ln 2}{3\ln 2 - \ln 5} = \frac{10 \cdot \lg 2}{4\lg 2 - 1}$ (мин).

13.** Скорость распада радия $Q'(t)$ в каждый момент времени t пропорциональна имеющемуся наличному количеству $Q(t)$ радия. Найдите закон распада радия, если начальное количество радия равно $Q(0) = Q_0$ и известно, что через 1600 лет останется лишь половина этого количества.

Указание. Согласно условию задачи, имеем дифференциальное уравнение $Q'(t) = kQ(t)$, где k — постоянный коэффициент. Решение этого уравнения имеет вид $Q'(t) = C \cdot e^{kt}$. Полагая $t = 0$, находим $C = Q_0$, а при $t = 1600$ получаем $\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 \cdot e^{k \cdot 1600}$, то есть $1600 \cdot k = -\ln 2$, $k = -\frac{\ln 2}{1600}$. Таким образом, закон распада имеет вид $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}$, где t — время в годах.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.* Какое из указанных множеств функций является общим решением дифференциального уравнения $y' = 3x^2y^2$ (C — постоянная)?

1) $y = \frac{1}{x^3} + C$ 2) $y = -\frac{1}{x^3} + C$ 3) $y = \frac{1}{x^3 + C}$ 4) $y = -\frac{1}{x^3 + C}$

Указание. Разделение переменных приводит к соотношению $\int \frac{dy}{y^2} = \int 3x^2 dx$, откуда $-\frac{1}{y} = x^3 + C$.

1.4.* Какое из указанных множеств функций является общим решением дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{y}$ (C — постоянная)?

1) $y = \sqrt{x + C}$, $y = -\sqrt{x + C}$ 2) $y = \sqrt{x^2 + C}$, $y = -\sqrt{x^2 + C}$

3) $y = \sqrt{2x + C}$, $y = -\sqrt{2x + C}$ 4) $y = \sqrt{2x^2 + C}$, $y = -\sqrt{2x^2 + C}$

Указание. Разделение переменных приводит к соотношению $\int y dy = \int x dx$, откуда $y^2 = x^2 + C$.

2.1. Какие из указанных функций $S(t)$ являются решениями дифференциального уравнения $S'' = 4$?

1) $S(t) = 4t^2 + 8t - 1$ 2) $S(t) = 2t^2 + 5t + 3$

3) $S(t) = 4t^2 - 3t - 2$ 4) $S(t) = 2t^2 - 18t + 1$

Указание. Запись $S'' = 4$ означает, что, взяв ещё одну производную от производной $S'(t)$, должны получить число 4. Например, для варианта 1 $S'(t) = 8t + 8$, $S''(t) = 8$.

2.3. Какие из указанных функций $y(x)$ являются решениями дифференциального уравнения $y'' + y = 0$?

1) $\sin x$ 2) $\cos x$

3) $\sin x - \cos x$ 4) $2\sin x + 3\cos x$

Указание. Запись y'' означает, что нужно вычислить производную от производной $y'(x)$.

2.4. Какие из указанных функций $y(x)$ являются решением дифференциального уравнения $y' = y^2 + 1$?

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 2) $\operatorname{tg} x + 2$ 3) $-\operatorname{ctg} x$ 4) $1 - \operatorname{ctg} x$

Указание. Разделение переменных приводит к соотношению $\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 1 \cdot dx$, откуда $\operatorname{arctg} y = x + C$, $y = \operatorname{tg}(x + C)$.

Глава 8
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель главы — ознакомить учащихся, которые проявляют особую склонность к изучению математики, с основными понятиями общей топологии и в качестве приложения рассмотреть определения замкнутой многоугольной области на плоскости и тела в пространстве.

Особенности главы. Представление о плоских и пространственных фигурах как о множествах точек достаточно быстро приводит ко многим необычным объектам, как, например, множество всех точек с рациональными координатами на координатной плоскости. Однако такие экзотические объекты далеки от содержания школьного курса математики, изучаемые в школьном курсе геометрические фигуры выделяются некоторыми характерными особенностями. Данная глава рассчитана на то, чтобы ознакомить учащихся с понятиями внутренней, внешней и граничной точки множества, ограниченностью множества, замкнутостью множества и на основе этих понятий дать общее определение тела и его поверхности в пространстве, привести определение замкнутой многоугольной области на плоскости и на этой основе сформулировать определение многогранника. В качестве практического приложения рассматриваются новые примеры многогранников. Наиболее сложные доказательства рассчитаны на третий уровень обучения.

§ 1. ГРАНИЦА И ВНУТРЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА

Цель параграфа — определить внутренние, внешние и граничные точки сначала для множеств в пространстве, а затем для множеств на плоскости и на прямой.

Особенности параграфа. Изучаемые в этом параграфе понятия основываются на понятии шаровой окрестности точки в пространстве и круговой окрестности на плоскости, что допускает хорошее наглядное представление в виде иллюстраций. Однако на прямой окрестности точек обычно воспринимаются труднее, а поэтому понятия внутренней, внешней и граничной точек для множества на прямой рассматриваются только на третьем уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: сфера; шар; пересечение сферы с плоскостью.

Новые математические понятия: внутренняя точка множества (в пространстве, на плоскости, на прямой); внешняя точка множества; граничная точка множества; внутренность множества; граница множества.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Почему граничные точки шара не являются его внутренними точками?

Ответ. Потому что для граничной точки не существует шара с центром в этой точке, который целиком содержится в заданном шаре.

1.2. Как доказать, что внутренняя точка шара входит в шар вместе с некоторой своей окрестностью?

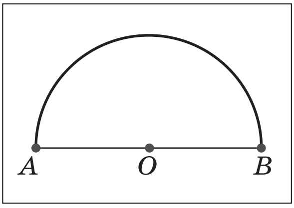
Ответ. Это сразу следует из определения внутренней точки.

1.3. Каковы внутренность и граница отрезка, рассматриваемого в пространстве?

Ответ. Внутренностью отрезка в пространстве является пустое множество, так как никакой шар радиуса $R > 0$ не может быть подмножеством отрезка. Каждая точка отрезка является его граничной точкой, потому что каждый шар, центр которого принадлежит отрезку, содержит как точки отрезка, так и точки, не принадлежащие отрезку. Других граничных точек у отрезка нет.

1.4. Как доказать, что центр O является граничной точкой рассматриваемого в примере 1 множества (см. рис.)?

Ответ. Прямая AB разделяет любой круг с центром O на два полукруга, причём точки одного из этих полукругов (за исключением диаметра) принадлежат данному множеству, а точки другого полукруга — не принадлежат.



1.5. Как доказать, что если последовательность (a_n) сходится к числу a, то это число a является одной из граничных точек множества $\{a_n\}$ всех членов этой последовательности?

Ответ. Покажем, что каждая окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству всех точек последовательности, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Для этого рассмотрим произвольную окрестность $U = (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, и проведём два рассуждения.

I. По определению предела последовательности для любого заданного ε найдётся число K такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > K$. Но тогда $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, откуда $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, то есть $a_n \in U$. Следовательно, в данной окрестности найдены точки из множества всех точек последовательности (a_n).

II. Рассмотрим теперь окрестность $V = \left(a - \frac{\varepsilon}{2};\ a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Также по определению предела последовательности для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдётся число L такое, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > L$, то есть $a_n \in V$ при всех $n > L$. Отсюда следует, что вне окрестности V находится либо конечное, либо пустое множество членов последовательности (a_n). В частности, в интервале $\left(a - \varepsilon;\ a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ может содержаться лишь конечное множество из членов последовательности (a_n). Но так как каждый интервал содержит бесконечное множество точек, то в интервале $\left(a - \varepsilon;\ a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ имеется точка, не совпадающая ни с одним из членов последовательности (a_n). Таким образом, в интервале $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ существуют точки, не принадлежащие множеству всех точек последовательности (a_n).

Указания к решению наиболее трудных задач

5.** Рассмотрим в координатном пространстве куб Φ, состоящий из точек $M(x; y; z)$, таких, что $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Докажите, что:

а) для точки $K\left(\frac{1}{3};\ -\frac{3}{4};\ \frac{1}{10}\right)$ найдётся окрестность, целиком содержащаяся в Φ;

б) для точки $L\left(\frac{5}{6};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$ найдётся окрестность, ни одна из точек которой не принадлежит Φ;

в) для точки $N\left(1;\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{3}\right)$ каждая её окрестность содержит точки, как принадлежащие множеству Φ, так и не принадлежащие ему.

Укажите: внутренность множества Φ; границу множества Φ; внешность множества Φ.

Указание. а) Такой будет каждая окрестность, радиус которой меньше 0,1; б) такой будет каждая окрестность, радиус которой меньше $\frac{1}{3}$; в) если радиус окрестности равен δ и $0 < \delta < 1$, то точка $N\left(1-\frac{\delta}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{3}\right)$ принадлежит этой окрестности, а точка $N\left(1+\frac{\delta}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{1}{3}\right)$ не принадлежит.

8.** На числовой прямой рассматривается множество Φ, равное объединению всех отрезков вида $\left[\frac{1}{2n};\ \frac{1}{2n-1}\right]$, где $n \in N$. Найдите границу множества Φ.

Указание. Множество граничных точек состоит из нуля и всех чисел вида $\frac{1}{m}$, где $m \in N$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. В координатном пространстве множество Φ задано неравенством $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2$. Какой для множества Φ является точка с координатами (1; 0; 1)?

1) внутренней
2) граничной
3) внешней
4) не принадлежащей множеству

Указание. $1^2 + 0^2 + 2 \cdot 1^2 > 2$.

1.2. Какая из фигур плоскости не имеет граничных точек?

1) вся плоскость
2) полуплоскость
3) плоский угол
4) внутренность треугольника

Указание. У внутренности множества каждая точка является внутренней.

1.4. Какое из объединений промежутков имеет единственную граничную точку?

1) $(-\infty; -1) \cup (-0{,}5; 2)$
2) $(-\infty; -3) \cup [-3; 5)$
3) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1]$
4) $(-\infty; -3] \cup (-2; -1)$

Указание. Единственная граничная точка будет у того объединения, которое является лучом числовой прямой.

2.2. Какие из точек являются внутренними для пересечения полуплоскостей $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, $x + 2y \geq 1$ на плоскости?

1) $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right)$

Указание. Изобразить пересечение этих полуплоскостей.

2.3. На числовой прямой рассматриваются отрезки [2; 4] и [3; 5]. Какие из указанных точек являются граничными для их объединения?

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

Указание. Объединением данных отрезков является отрезок.

2.4. На числовой прямой рассматривается множество $A = \left[0; \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{5}; \sqrt{10}\right]$. Какие из указанных точек являются внешними для множества A?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Указание. Внешней будет каждая точка, не принадлежащая множеству A.

§ 2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЛА И ЗАМКНУТЫЕ ПЛОСКИЕ ОБЛАСТИ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием ограниченности, замкнутости и линейной связности на плоскости и в пространстве, с помощью этих понятий сформулировать определения замкнутого тела и замкнутой плоской области.

Особенности параграфа. Параграф рассчитан на начальное знакомство с несколькими математическими понятиями, каждое из которых имеет важное значение в современной математике и может встречаться в различных разделах. Поэтому основное внимание следует сосредоточить на уяснении смысла каждого из понятий, чтобы учащиеся умели приводить разнообразные примеры множеств в пространстве и на плоскости, как удовлетворяющие соответствующему определению, так и не удовлетворяющие ему. Бо́льшая часть параграфа рассчитана на первый уровень. На третьем уровне рассматриваются доказательства непростых утверждений.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: внутренняя, внешняя и граничная точки множества пространства, плоскости или прямой.

Новые математические понятия: ограниченность множества; связность внутренности множества; замкнутость множества; тело (в пространстве); замкнутая область (на плоскости).

Вспомогательные математические понятия: поверхность тела.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Какая фигура является границей куба?

Ответ. Фигура, состоящая из всех точек всех граней куба.

2.2. Как доказать, что если множество элементов пространства содержится в некотором кубе, то это множество ограничено?

Ответ. Рассмотрим шар, граница которого описана вокруг данного куба. Этот шар содержит заданное множество, и по определению это множество ограничено.

2.3. Как доказать, что каждое тело имеет бесконечное множество внутренних точек?

Ответ. Если некоторый шар содержится в заданном теле Ф, то каждая внутренняя точка шара является внутренней точкой тела Ф, а шар содержит бесконечное множество внутренних точек.

2.4.** Как доказать, что внутренность объединения двух шаров, имеющих общую внутреннюю точку, связна?

Ответ. Если два шара имеют общие точки и не касаются, то расстояние d между центрами O_1 и O_2 шаров меньше суммы их радиусов R и r. Выбрав на отрезке O_1O_2 точку M так, что $O_1M = R - \frac{1}{2}(R + r - d)$, получим, что шар с центром в точке M и радиусом $2d$, равным $\frac{1}{4}(R + r - d)$, целиком содержится в каждом из данных шаров. С помощью точки M нетрудно доказать, что любые две точки внутренности объединения шаров можно соединить ломаной, состоящей из внутренних точек. Действительно, если точки A и B принадлежат внутренности одного из шаров, то их можно соединить отрезком AB, и все точки этого отрезка являются внутренними. Если же точки A и B принадлежат внутренностям разных шаров, то все точки ломаной AMB являются внутренними для внутренности объединения шаров.

2.5. Как доказать, что точка, не принадлежащая замкнутому множеству $Ф$, является внешней точкой множества $Ф$?

Ответ. В этом случае точка M не является граничной, не является внутренней, а поэтому является внешней для множества Φ.

2.6. Как доказать, что объединение замкнутого шара и отрезка является замкнутым множеством?

Ответ. Объединение замкнуто, потому что является объединением двух замкнутых множеств. Действительно, если заданы два замкнутых множества F_1 и F_2, то любая точка M дополнения к множеству F_1 и F_2 является внешней для F_1 и F_2. Это значит, что найдутся две шаровых окрестности $U_{r_1}(M)$ и $U_{r_2}(M)$, не имеющие общих точек с F_1 и F_2 соответственно. Пусть r — наименьшее из чисел r_1 и r_2. Тогда окрестность $U_r(M)$ не имеет общих точек с множеством F_1 и F_2, то есть является внешней для него.

2.7. Как доказать, что в координатном пространстве множество всех точек с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющими двойному неравенству $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, является телом?

Ответ. Прежде всего, это множество ограничено, так как содержится в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$. Далее, внутренность этого множества заключена между двумя сферами с общим центром $(0; 0; 0)$ и радиусами 1 и 4. Ясно, что любые две точки внутренности можно соединить ломаной линией, лежащей между двумя сферами, поэтому внутренность связная. Эти сферы составляют границу внутренности рассматриваемого множества. Кроме того, заданное множество замкнуто. В результате заданное множество имеет все свойства, которые должно иметь тело в пространстве.

2.8.** Как доказать, что отрезок является замкнутой фигурой в пространстве?

Ответ. Каждая точка отрезка в пространстве, в соответствии с определением, является граничной точкой отрезка, откуда следует, что все граничные точки отрезка принадлежат этому отрезку, и по определению отрезок является замкнутым множеством в пространстве.

2.9.** Как доказать, что точка F принадлежит данному телу?

Ответ. В пункте показано, что точка F является граничной точкой рассматриваемого тела, и поэтому по определению принадлежит телу.

2.10.** Будет ли замкнутой областью фигура, состоящая из трёх точек и трёх попарно соединяющих их отрезков?

Ответ. Нет, не будет, так как внутренностью данной фигуры является пустое множество, а замкнутая область по определению должна иметь внутренние точки.

Указания к решению наиболее трудных задач

5.** На плоскости фигура Ф содержит точки A и B, причём известно, что $AB = 1$, а расстояние между любыми двумя точками фигуры Ф не превосходит единицы. Докажите, что фигуру Ф можно заключить в круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Указание. Фигура Ф содержится в круге радиуса $AB = 1$ с центром в точке A и в круге того же радиуса с центром в точке B. Следовательно, Ф содержится в пересечении этих кругов, которое покрывается кругом радиуса $\frac{\sqrt{3}}{2}$ с центром в середине отрезка AB.

7.** В пространстве заданы два шара радиуса R, расстояние между центрами которых равно R. Опишите, какой вид имеет: а) внутренность пересечения; б) граница пересечения. Объясните, почему такое пересечение является пространственным телом.

Указание. Пересечение данных шаров состоит из двух шаровых сегментов с общим основанием радиуса $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ и высотой каждого сегмента, равной $\frac{R}{2}$.

8.** На высоте правильного тетраэдра, как на диаметре, построен шар. Опишите, какой вид имеет: а) внутренность пересечения; б) граница пересечения. Объясните, почему такое пересечение является пространственным телом.

Указание. Пересечением тетраэдра с шаром является часть шара без шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостями боковых граней тетраэдра.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. Какое из указанных множеств в пространстве является телом?

1) отрезок 2) сфера 3) круг 4) шар

Указание. Фигуры, указанные в первых трёх вариантах, не имеют внутренних точек.

1.2.* Какое из указанных неравенств задаёт в пространстве множество, которое является телом?

1) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$ 2) $x + y + z \leq 3$

3) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ 4) $x + y + z \geq 5$

Указание. Фигуры, указанные в вариантах 1, 2, 4, не являются ограниченными.

1.4. Какая точка из указанных является внутренней для плоского треугольника на координатной плоскости с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0)?

1) (0,2; 0,9) 2) (0,3; 0,4)

3) (0,4; 0,6) 4) (0,3; 0,7)

Указание. Изобразить заданный треугольник на координатной плоскости.

2.1. Какие из указанных множеств пространства не имеют внутренних точек?

1) множество всех точек, удалённых от заданной точки на расстояние 2

2) объединение всех сфер радиуса 1 с центрами на заданной сфере радиуса 3

3) множество всех точек, удалённых от заданной плоскости на расстояние 2

4) множество всех точек, расстояние от которых до какой-либо из точек заданной плоскости равно 2

Указание. В варианте 1 получается сфера; в варианте 2 получается шар, из которого удалены внутренние точки шара меньшего радиуса; в варианте 3 получаются две плоскости; в варианте 4 получается часть пространства, заключённая между двумя параллельными плоскостями.

2.2. Пусть множества A и B задаются в пространстве неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ соответственно. Какие из множеств являются телом?

1) $A \cap B$ 2) $A \cup B$

3) $A \setminus B$ 4) $B \setminus A$

Указание. В варианте 2 множество не ограничено; в варианте 3 множество не замкнуто; в варианте 4 множество и не ограничено, и не замкнуто.

§ 3. ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА

Цель параграфа — определить выпуклые множества в пространстве, выпуклые тела и рассмотреть основные свойства выпуклых тел.

Особенности параграфа. Сначала напоминается определение выпуклой фигуры на плоскости. Затем по аналогии определяется выпуклая фигура в пространстве, а после этого и выпуклое тело. Затем рассматривается свойство пересечения выпуклого тела с прямыми, на основе чего формулируется один из признаков выпуклости тела. На третьем уровне изучается теорема о выпуклости пересечения полупространств, приводится формулировка теоремы отделимости и рассматривается задание выпуклого тела в виде пересечения полупространств.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: выпуклость множеств на плоскости; определение тела.

Новые математические понятия: выпуклая фигура в пространстве; выпуклое тело в пространстве.

Вспомогательные математические понятия и свойства: теорема отделимости; задание выпуклых фигур в пространстве пересечением полупространств.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Как доказать, что непустое пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ. Пусть D — непустое пересечение выпуклых фигур F_1 и F_2 и A, B — две произвольные точки из D. Тогда A и B принадлежат каждой из выпуклых фигур F_1 и F_2. Поэтому обе фигуры содержат отрезок AB, а это означает, что все точки отрезка AB принадлежат пересечению D фигур F_1 и F_2, и по определению D — выпуклая фигура.

3.2.** Как доказать, что если выпуклое множество F на плоскости содержит две пересекающиеся прямые, то F — это вся плоскость?

Ответ. Пусть выпуклое множество F на плоскости содержит две пересекающиеся прямые a и b. Рассмотрим произвольную точку M на плоскости, не лежащую ни на одной из прямых a, b (рис. 1). Проведём через M прямую c так, что $c \| b$, и пусть она пересекает прямую a в точке A. Возьмём на пря-

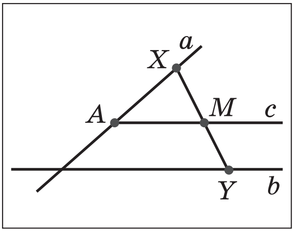


Рис. 1

мой a произвольную точку X, отличную от A, и проведём прямую XM. Она пересекает прямую b в некоторой точке Y. Поскольку точки X и Y принадлежат множеству F и точка M лежит между ними, то $M \in F$. Таким образом, F — вся плоскость.

3.3. Как доказать сформулированное в этом пункте свойство: непустое пересечение нескольких выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Ответ. На первом уровне это свойство следует рассмотреть для конечного числа выпуклых фигур. Пусть D — непустое пересечение выпуклых фигур F_1, F_2, ..., F_n и A, B — две произвольные точки из D. Тогда A и B принадлежат каждой из выпуклых фигур F_1, F_2, ..., F_n. Поэтому все фигуры содержат отрезок AB, а это означает, что все точки отрезка AB принадлежат пересечению D, то есть D — выпуклая фигура.

На втором и третьем уровне можно обратить внимание учащихся на то, что рассуждения практически не изменятся, если считать, что рассматривается непустое пересечение бесконечного семейства выпуклых фигур.

3.4. В каком случае объединение двух шаров будет выпуклым телом?

Ответ. В случае, когда один шар содержится в другом.

3.5.** Как доказать, что любой луч с началом во внутренней точке выпуклого тела пересекает это тело по отрезку?

Ответ. Пусть луч l имеет своим началом внутреннюю точку A выпуклого тела F. Прямая, частью которой является данный луч, имеет с выпуклым телом F хотя бы одну общую точку A. По свойству из п. 3.6 эта прямая пересекает тело F по некоторому отрезку BC (рис. 2). Точка A лежит между B и C. Если, к примеру, точка C принадлежит лучу l, то AC есть отрезок, по которому луч l пересекает данное тело F. В противном случае искомым отрезком будет AB.

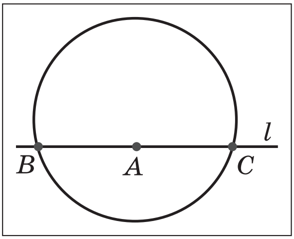


Рис. 2

3.6.** Как доказать, что прямой круговой цилиндр со своими внутренними точками является выпуклым телом?

Ответ. Прежде всего, прямой круговой цилиндр является телом. Далее, каждая прямая либо не имеет общих точек с цилиндром, либо имеет только одну общую точку, либо пересекает цилиндр по отрезку. На основании сформулированного в данном пункте признака можно сделать вывод, что прямой круговой цилиндр F — выпуклое тело.

3.7.** Как выглядит приведённое доказательство для плоскости с уравнением $z=0$?

Ответ. Пусть плоскость α задана уравнением $z = 0$ и U — множество точек $(x;\ y;\ z)$, где $z > 0$, а V — множество точек $(x;\ y;\ z)$, для которых $z < 0$.

Пусть точки $A(m_1; n_1; k_1)$ и $B(m_2; n_2; k_2)$ принадлежат одному из множеств U или V, например U. Тогда $k_1>0$ и $k_2>0$. Если точка $M(m; n; k)$ лежит между точками A и B, то $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$, где O — начало координат и $0 < \lambda < 1$. Отсюда $\overrightarrow{OM} = (m_1;\ n_1;\ k_1) + \lambda(m_2-m_1;\ n_2-n_1;\ k_2-k_1)$. Следовательно, $k = k_1 + \lambda(k_2 - k_1) = (1 - \lambda)k_1 + \lambda k_2 > 0$. Поэтому $M \in U$.

Пусть теперь $A \in U$ и $B \in V$. Тогда $k_1 > 0$ и $k_2 < 0$. Для точки $M(m; n; k)$, лежащей между точками A и B, координата $k=(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2$ обращается в нуль при $\lambda_0 = \dfrac{k_1}{k_1-k_2}$, причём $0 < \lambda_0 < 1$. При этом точка M окажется на плоскости α, то есть на плоскости Oxy.

Таким образом, доказано, что неравенства $z > 0$ и $z < 0$ определяют два полупространства с границей α.

3.8.** Как доказать, что в пространстве точку, не лежащую на отрезке, можно отделить плоскостью от этого отрезка?

Ответ. Пусть даны отрезок AB и точка M вне его. Если M не лежит на прямой AB, то из точки M опускаем на прямую AB перпендикуляр MK. Через середину отрезка MK проводим плоскость α так, что $\alpha \perp MK$ (рис. 3). Тогда прямая AB параллельна α, а поэтому не пересекает α. Так как точки M и K лежат

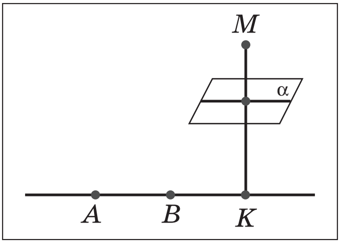


Рис. 3

в разных полупространствах с границей K, то плоскость α отделяет точку M от отрезка AB.

Если же точка M лежит на прямой AB, то можно предположить, что B лежит между A и M. Тогда через середину отрезка проводим плоскость α, перпендикулярную к прямой AB. Она будет отделять точку M от отрезка AB.

3.9.** Как задать треугольную пирамиду пересечением полупространств?

Ответ. Треугольную пирамиду можно задать пересечением полупространств, определяемых плоскостями граней пирамиды.

Указания к решению наиболее трудных задач

4.** Из квадрата, рассматриваемого с внутренними точками, удалили вершины. Докажите, что получившаяся фигура — выпуклое множество.

Указание. Пусть Φ — квадрат без вершин и точки M, N принадлежат Φ. Тогда точки M, N являются точками полного квадрата с включёнными вершинами, и поэтому все внутренние точки отрезка MN принадлежат полному квадрату с вершинами, не совпадают с вершинами квадрата, а поэтому принадлежат множеству Φ. В результате показано, что множество Φ удовлетворяет определению выпуклого множества.

8.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ (рис. 4). Какие точки пространства можно отделить плоскостью от этой пирамиды, а какие нельзя?

Указание. Пусть SAB, SBC, BAC и SAC — полупространства, не содержащие точек пирамиды $SABCD$. Точки объединения этих полупространств можно отделить плоскостью от пирамиды $SABCD$. Неотделимыми являются точки пирамиды $SACD$.

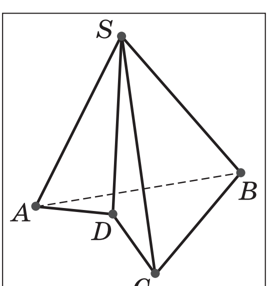


Рис. 4

9.** Какой системой линейных неравенств в координатном пространстве задаётся тетраэдр с вершинами $A(1; -2; 1)$, $B(2; 0; -3)$, $C(-1; 4; 0)$, $D(0; 1; 1)$?

Указание. Для получения одного из неравенств составить уравнение плоскости ABC в виде $ax + by + cz + d = 0$ и заменить в этом уравнении знак равенства на знак нестрогого неравенства таким образом, чтобы координаты точки D были одним из решений полученного неравенства. Аналогично составляются и другие неравенства, задающие тетраэдр.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. В каком случае минимальная выпуклая фигура в пространстве, содержащая четыре точки A, B, C и D, будет плоским четырёхугольником?

1) точка C принадлежит отрезку AB

2) точки лежат на одной прямой

3) прямые AC и BD пересекаются в точке, принадлежащей отрезку AC и не принадлежащей отрезку BD

4) отрезки AB и CD пересекаются в точке, отличной от A, B, C и D

Указание. В варианте 1 минимальная выпуклая фигура либо треугольник, либо отрезок, в варианте 2 — отрезок, в варианте 3 — иногда может получаться треугольник, в варианте 4 — всегда четырёхугольник.

1.4.** Множество решений какого из неравенств изображается на координатной плоскости в виде выпуклого множества?

1) $x^2 + y^2 > 1$ 2) $y \le x^2$

3) $|x| \ge y$ 4) $|x| + |y| < 2$

Указание. Представить каждое из множеств на координатной плоскости.

2.1. На координатной плоскости рассматривается объединение плоского прямоугольника $ABCD$ с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(4;\ 3)$, $D(4;\ 0)$ и плоского треугольника ABM. В каких из указанных случаев получается выпуклая фигура?

1) $M(-2;\ 1)$ 2) $M(-5;\ 4)$

3) $M(-1;\ -2)$ 4) $M(3;\ 5)$

Указание. При отрицательной абсциссе ордината точки M должна принадлежать промежутку $[0;\ 3]$, при абсциссе точки M, равной 3, ордината также должна принадлежать промежутку $[0;\ 3]$.

2.3. Какие из указанных множеств на плоскости являются выпуклыми?

1) множество всех точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых

2) множество всех точек, равноудалённых от двух параллельных прямых

3) множество всех точек круга, из которого удалили концы одного диаметра

4) множество всех точек плоского квадрата, из которого удалили середины сторон

Указание. В варианте 1 множеством является объединение двух пересекающихся прямых; в варианте 2 множеством является прямая; множество из варианта 3 является выпуклым; множество из варианта 4 не является выпуклым.

§ 4. МНОГОГРАННИКИ

Цель параграфа — определить понятие многоугольной области и многогранника, рассмотреть несколько примеров многогранников, которые отличаются от встречавшихся ранее многогранников.

Особенности параграфа. Конкретные примеры многоугольников и многогранников обычно воспринимаются без особого труда. Однако при переходе к обобщению возникают серьёзные проблемы. Дело в том, что при общем подходе к определению многогранника уже недостаточно воспринимать плоские многоугольные грани как такие, которые ограничены одной замкнутой ломаной, что в учебнике демонстрируется на примерах. Поэтому сначала вводится понятие замкнутой многоугольной области на плоскости, которое иллюстрируется многими примерами. Далее по аналогии формулируется определение многогранника и на примерах показывается, что такое определение значительно пополняет известные ранее виды многогранников. С целью практических приложений в конце параграфа рассматриваются усечённые пирамиды и некоторые другие виды многогранников.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: плоская область; тело; выпуклые множества на плоскости и в пространстве.

Новые математические понятия: многоугольная область; многогранник; выпуклый многогранник.

Вспомогательные математические понятия: триангуляция.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Из каких многоугольников состоит граница пятиугольной призмы?

Ответ. Из двух пятиугольников и пяти параллелограммов.

4.2. Как определяется замкнутая плоская область?

Ответ. Замкнутой плоской областью называется непустое ограниченное замкнутое множество точек плоскости со связной внутренностью, граница которого совпадает с границей его внутренности.

4.3. Будет ли многогранником фигура, полученная удалением из куба всех внутренних точек октаэдра, вершины которого совпадают с центрами граней заданного куба?

Ответ. Данная фигура является телом, и её граница — объединение четырнадцати многоугольных областей. Поэтому по определению данная фигура является многогранником.

4.4.** Как построить тело, граница которого состоит из бесконечного числа многоугольных областей?

Ответ. Например, можно взять построенную в пункте 4.3 замкнутую плоскую область, граница которой состоит из бесконечного числа отрезков, и каждую точку соединить отрезком с выбранной вне плоскости точкой.

4.5. Выпуклый многогранник плоскостью разбит на два многогранника. Как доказать, что получившиеся многогранники — выпуклые?

Ответ. Фиксируем какое-либо полупространство, определяемое данной полуплоскостью. Оно выпуклое, и в пересечении с выпуклым многогранником получим выпуклый многогранник. Аналогично доказывается, что и другая часть является выпуклым многогранником.

4.6. Как вычислить площадь поверхности усечённой пирамиды, то есть сумму площадей всех её граней?

Ответ. У той пирамиды, которая отсекается при получении усечённой пирамиды, площади всех граней можно вычислить из соображений подобия, причём коэффициенты подобия все одинаковы. Затем площади боковых граней усечённой пирамиды находятся путём вычитания.

4.7.** Какие примеры полуправильных многогранников можете привести вы?

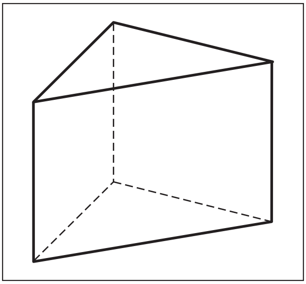


Рис. 1

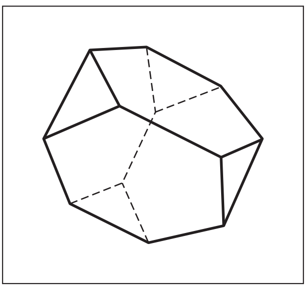


Рис. 2

Ответ. Выпуклые полуправильные многогранники впервые изучал величайший древнегреческий математик и механик Архимед в III веке до нашей эры. Полуправильными называются многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани правильные, но не все равные между собой многоугольники. К выпуклым полуправильным многогранникам относятся, например, прямые призмы, у которых боковые грани — квадраты, а в основаниях — правильные n-угольники при $n = 3, 5, 6, \ldots$. Одна из таких призм — треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты (рис. 1). Рекомендуется изобразить аналогичные призмы при $n = 5$, $n = 6$ и объяснить, почему пропущено число $n = 4$. Кроме перечисленных прямых призм к выпуклым полуправильным многогранникам относятся также «скошенные» призмы. В их основаниях — правильные n-угольники, а боковые грани — равносторонние треугольники в количестве $2n$, причём скошенные призмы можно строить для $n = 3, 4, 5, \ldots$. При $n = 4$ скошенная призма имеет вид, условно изображённый на рис. 2.

Выпуклые полуправильные многогранники принято называть также телами Архимеда. Впервые они классифицированы Архимедом, который обнаружил 13 типов таких многогранников. Последний, 14-й возможный тип был обнаружен только в XX веке. Невыпуклые полуправильные многогранники полностью не изучены до настоящего времени.

Указания к решению наиболее трудных задач

2. Докажите, что круг можно представить в виде объединения бесконечного числа треугольников.

Указание. Для каждой точки границы круга можно построить вписанный в круг правильный треугольник, одна из вершин которого находится в этой точке. Объединение всех таких треугольников есть весь круг.

5.** В правильную усечённую треугольную пирамиду, у которой в основаниях правильные треугольники со сторонами 1 см и 2 см, можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.

Указание. Центр шара является серединой отрезка, соединяющего центры оснований усечённой пирамиды.

6.** Докажите, что около каждой правильной усечённой пирамиды можно описать сферу.

Указание. Пусть a — прямая, проходящая через центры оснований правильной усечённой пирамиды. Центр описанной сферы лежит в точке пересечения прямой a с плоскостью, перпендикулярной боковому ребру усечённой пирамиды и проходящей через середину этого ребра.

7.** В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нижнее основание $ABCD$ — квадрат со стороной 3, верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 1, боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 3. Точка M — середина ребра C_1D_1. Через точку M проходит прямая, пересекающая прямые AA_1 и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

Указание. Искомый отрезок расположен в плоскости BCM, а точка P — пересечение прямой AA_1 с плоскостью BCM.

8.** Основания усечённой пирамиды являются правильными треугольниками, а их периметры относятся как 8 : 5. Сфера с центром, расположенным в плоскости меньшего из оснований, касается другого основания и продолжений боковых граней пирамиды. Найдите углы, образованные боковыми рёбрами пирамиды с большим основанием, если известно, что все эти углы одинаковы.

Указание. Данная усечённая пирамида получается из некоторой правильной пирамиды $SABC$. Центр O заданной сферы лежит на высоте SH пирамиды, и если плоскость ASH пересекает ребро BC в точке K, то KO — биссектриса в треугольнике KSH.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.** Рёбра одного из оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 2, а все остальные рёбра равны 1. Чему равен радиус сферы, описанной около этой пирамиды?

1) $\frac{\sqrt{21}}{4}$ 2) $\frac{\sqrt{22}}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{23}}{4}$ 4) $\frac{\sqrt{24}}{4}$

Указание. Данная усечённая пирамида получается из правильного тетраэдра с ребром 2. При вычислении радиуса сферы полезно использовать тангенс угла между высотой и боковым ребром правильного тетраэдра, который равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.3.** Грани полуправильного многогранника с 12 вершинами — квадраты и треугольники. К каждой вершине примыкают два квадрата и два треугольника. Сколько граней у этого многоугольника?

1) 10 2)12 3) 14 4) 16

Указание. Такой многогранник приведён в пункте 4.7** на рис. 1 и рис. 2.

2.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, высота которой равна 8, на боковых рёбрах AA_1, BB_1, CC_1 выбираются соответственно точки K, L, M. В каких случаях многогранник с вершинами A, B, C, K, L, M равен многограннику с вершинами A_1, B_1, C_1, K, L, M?

1) $AK = 4$, $BL = 3$, $CM = 5$ 2) $AK = 1$, $BL = 4$, $CM = 5$

3) $AK = 5$, $BL = 2$, $CM = 4$ 4) $AK = 2$, $BL = 4$, $CM = 6$

Указание. Одна из длин отрезков должна быть равной 4, а сумма двух остальных — должна быть равной 8.

2.4.** В многограннике $ABCA_1B_1C_1$ грань BB_1C_1C является квадратом со стороной 20, ребро AA_1 параллельно ребру BB_1, грани ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные треугольники и $AA_1 < BB_1$. Каким может быть расстояние от вершины A до плоскости грани BB_1C_1C?

1) 14 2) 15 3) 16 4) 17

Указание. Искомое расстояние больше $10\sqrt{2}$ и не больше $10\sqrt{3}$.

Глава 9
ПЛОЩАДЬ И ОБЪЁМ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Цель главы — рассмотреть некоторые общие подходы к определению площадей и объёмов, ввести для площадей и объёмов термин «мера», особо выделить свойства монотонности и аддитивности, которыми обладают и другие рассматриваемые в математике меры множеств, а также ввести понятие определённого интеграла и рассмотреть приложения методов математического анализа к вычислению площадей плоских фигур и объёмов пространственных тел.

Особенности главы. Довольно часто при аксиоматическом подходе к тому или иному разделу математики значительные трудности возникают на самом начальном этапе построения теории, что наблюдается также и при аксиоматическом подходе к теории площадей и объёмов. В данной главе рассматривается один из подходов, который известен как построение меры Жордана на плоскости и в пространстве, причём для площадей всё рассматривается достаточно подробно, а для объёмов в основном приводится только описание со ссылками на аналогии с площадями.

В теории площадей логические трудности возникают сразу же после определения элементарных фигур и их площади. Дело в том, что приходится вычислять площади не только объединений фигур, но и пересечений и разностей. Однако, в отличие от объединения, иногда пересечение элементарных фигур не пусто, но не является элементарной фигурой. Чтобы преодолеть эту трудность, в главе рассматривается не совсем стандартный подход: для элементарных фигур определяются новые особые операции — e-объединение («элементарное» пересечение) и e-разность («элементарная» разность), не совпадающие с теоретико-множественными операциями объединения и разности. В итоге, несмотря на кажущуюся простоту, теория площадей для элементарных фигур представляет собой фрагмент серьёзной математической теории, что особенно следует учитывать при изучении материала первого параграфа.

Дальнейшее развитие теории площадей как меры Жордана близко к общепринятому. Некоторые из свойств формулируются и разбираются с доказательствами. Однако непростые свойства только формируются, и одним из таких свойств при аксиоматическом подходе является измеримость фигуры, равной некоторой измеримой фигуре («инвариантность при перемещениях»).

Затем на первом и втором уровне основное внимание обращается на изучение формул для вычисления площади криволинейной трапеции и объёма тел с помощью определённого интеграла. На третьем уровне дополнительно рассматриваются некоторые условия применимости этих формул и соответствующие доказательства.

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФИГУРЫ

Цель параграфа — напомнить известные свойства площади, с помощью палеток определить на координатной плоскости элементарные фигуры и их площади, рассмотреть основные свойства площади на множестве элементарных фигур.

Особенности параграфа. На начальном этапе изучение элементарных фигур очень просто, напоминает детскую игру в составление фигур из квадратиков и мало отличается от того, чем приходилось заниматься в младших классах. Тем не менее имеется существенная разница: элементарными фигурами считаются не всякие фигуры, составленные из квадратиков, а только такие, которые на координатной плоскости составлены из фиксированных квадратов, определённых с помощью клеток, на что особо следует обратить внимание. В дальнейшем при переходе к рассмотрению пересечений элементарных фигур выясняется, что пересечением, например, двух соседних квадратов палетки произвольного ранга является отрезок, то есть не элементарная фигура. В связи с этим для элементарных фигур вводится не совсем обычная операция e-пересечения так, что e-пересечение элементарных фигур либо пусто, либо также является элементарной фигурой. Другими словами, e-пересечение фигур A и B определяется как фигура, состоящая из всех общих квадратов палетки соответствующего ранга, содержащихся как в фигуре A, так и в фигуре B. Затем аналогично определяется и e-разность элементарных фигур. В результате на множестве элементарных фигур возникает несколько операций, далее изучаются свойства площади элементарных фигур относительно этих операций. В частности, особо выделяются свойства монотонности и аддитивности.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: начальные сведения о площади плоских фигур, формулы площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции.

Новые математические понятия: палетка на координатной плоскости; элементарная фигура; площадь элементарной фигуры.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Каковы формулы площадей треугольника, параллелограмма и трапеции?

Ответ. Площадь треугольника можно вычислять по следующим формулам: $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, $S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$, $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — стороны треугольника, h_a — высота, проведённая к стороне a, φ — угол между сторонами a и b, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности.

Площадь параллелограмма можно вычислять по формулам: $S = a \cdot h_a$, $S = ab\sin\varphi$, $S = \frac{1}{2}mn\sin\gamma$, где a, b — соседние стороны параллелограмма, φ — угол параллелограмма, m, n — длины диагоналей параллелограмма, γ — угол между диагоналями. Площадь трапеции можно вычислять по формулам: $S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$, $S = \frac{1}{2}mn\sin\gamma$, где a, b — основания трапеции, h — высота, m, n — длины диагоналей, γ — угол между диагоналями.

1.2. Как выводится формула для площади прямоугольника?

Ответ. Вывод формулы площади треугольника основан на том, что сначала формула доказывается для прямоугольников с рациональными длинами сторон при помощи разбиения на квадраты. Затем для прямоугольника с произвольными длинами a и b сторон строится последовательность вложенных прямоугольников с рациональными сторонами c_n и b_n и последовательность окружающих прямоугольников с рациональными сторонами a_n и d_n так, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = b$. После этого соответствующая формула получается с помощью предельного перехода.

1.3. Сколько квадратов сети ранга n имеют общие точки с заданным квадратом сети ранга n?

Ответ. Восемь, не считая самого заданного квадрата.

1.4. Можно ли из 548 квадратов ранга 8 составить элементарную фигуру ранга 5?

Ответ. Если элементарную фигуру ранга 5 делить на квадраты ранга 8, то общее число получающихся квадратов должно делиться на $4^3 = 64$. Поскольку число 548 не делится на 64, то указанную в условии элементарную фигуру составить невозможно.

1.5. Как доказать, что если F и G — элементарные фигуры, причём $F \subseteq G$ и $S(F) = S(G)$, то $F = G$?

Ответ. Если считать, что каждая из фигур составлена из квадратов одного ранга, то равенство площадей фигур означает равенство числа квадратов, а ввиду того, что одна из элементарных фигур является подмножеством другой, то все квадраты одной фигуры составляют и другую фигуру.

1.6.** В каком случае непустое теоретико-множественное пересечение элементарных фигур является элементарным пересечением этих фигур?

Ответ. В том случае, когда в состав теоретико-множественного пересечения данных фигур не входит ни одного отрезка, который не является стороной никакого из квадратов, содержащихся в пересечении.

1.7.** Чему равна площадь элементарной разности между элементарной фигурой F и пустым множеством?

Ответ. Равна площади элементарной фигуры F.

1.8.** Пусть F и G — такие элементарные фигуры, что $S(F \cup G) = S(F) + S(G)$. Что можно сказать об элементарном пересечении $F \overset{e}{\cap} G$?

Ответ. Элементарным пересечением данных фигур является пустое множество.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.* Для треугольника M с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(2;\ 0)$ найдите элементарную фигуру K, такую, что $K \supseteq M$, а площадь фигуры K меньше 3,2.

Указание. Эту фигуру можно построить из квадратов палетки ранга 4, то есть из квадратов со стороной $\frac{1}{16}$, примерно так, как изображено на рис. 1. Всякий из прямоугольников с отношением сторон 2 : 3, выделенных на рис. 1, можно разбить на шесть равных квадратов так, что четыре из них будут включать соответствующую часть диагонали, и один из таких прямоугольников изображён на рис. 2.

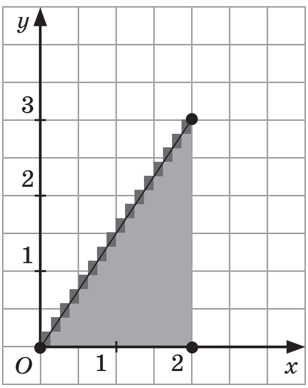


Рис. 1

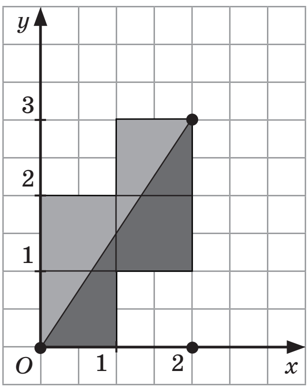


Рис. 2

Заштрихованные на этом рисунке квадраты образуют фигуру площади $4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$, а половина их площади составляет $\frac{1}{128}$. Такая площадь добавляется к прямоугольному треугольнику со сторонами $\frac{2}{16}$ и $\frac{3}{16}$. Далее можно заметить, что вдоль гипотенузы заданного треугольника расположено 16 таких фигур (рис. 1). Поэтому при добавлении заштрихованных квадратов палетки площадь треугольника, которая равна 3, увеличивается на $\frac{16}{128} = \frac{1}{8}$. Отсюда и из того, что $3{,}2 > 3\frac{1}{8}$, получаем решение задачи.

4.** Для отрезка M с концами $A(0;\ 0)$ и $B(1;\ 2)$ найдите элементарную фигуру K, такую, что $K \supseteq M$, а площадь фигуры K меньше 0,1.

Указание. Фигуру следует строить аналогично тому, как изображено на рис. 1, и считать, что покрывают отрезок выделенные тёмным цветом прямоугольники. Для достижения нужного результата следует рассмотреть палетку ранга 5, то есть составленную из квадратов со стороной $\frac{1}{32}$, а один из прямоугольников, покрывающих заданый отрезок, изображён на рис. 3. В результате получим, что отрезок M содержится в фигуре K, площадь которой $2 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32} \cdot 32 = \frac{1}{12}$, что меньше 0,1.

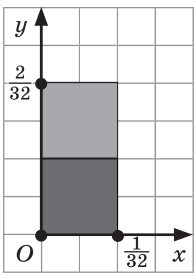


Рис. 3

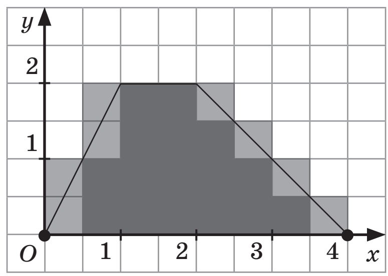


Рис. 4

5.** Для трапеции M с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 2)$, $C(2;\ 2)$, $D(4;\ 0)$ найдите элементарные фигуры N и K, такие, что $M \subseteq N$, $M \supseteq K$, а модуль разности площадей фигур K и N меньше 0,1.

Указание. Фигуры N и K следует строить аналогично тому, как изображено на рис. 4, однако для достижения требуемой разности площадей следует рассмотреть палетку ранга 6, то есть составленную из квадратов со стороной $\frac{1}{64}$. В результате для разности площадей внешней и внутренней элементарной фигур будут выполнены соотношения $4 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{64} \cdot 64 = \frac{1}{16} < 0,1$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. Элементарная фигура состоит из 8 квадратов палетки ранга 3. Сколько квадратов палетки ранга 5 составляют эту фигуру?

1) 32 2) 64 3) 128 4) 256

Указание. Каждый квадрат палетки ранга 3 содержит 16 квадратов палетки ранга 5.

1.3. Сколько квадратов палетки ранга n, где n — натуральное число, имеют общие точки с контуром квадрата нулевого ранга?

1) 2^n 2) 2^{n-1} 3) 2^{n+2} 4) 2^{n+3}

Указание. К каждой стороне заданного квадрата можно с двух сторон приложить по 2^n квадратов палетки ранга n. При этом получатся 4 общих квадрата, которые можно переместить с внешней стороны в вершины заданного квадрата.

2.1. Для каких из указанных значений S существует элементарная фигура площади S?

1) $S = 2$ 2) $S = \frac{5}{2}$ 3) $S = \frac{4}{3}$ 4) $S = \frac{5}{4}$

Указание. Площадь элементарной фигуры может быть только рациональным числом, которое в несократимом виде имеет знаменатель вида 4^n, где n — натуральное число.

2.2. В каких из указанных случаев квадрат $ABCD$ на координатной плоскости является элементарной фигурой?

1) $A(1; -1)$, $B(-1; -1)$, $C(-1; 1)$, $D(1; 1)$

2) $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$

3) $A(0; 0)$, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

4) $A(0; 0)$, $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{3}; 0\right)$

Указание. Координаты вершин элементарной фигуры могут быть только рациональными числами, которые в несократимом виде имеют знаменатели вида 2^n, где n — натуральное число.

§ 2. МЕРА ЖОРДАНА

Цель параграфа — определить измеримость по Жордану множеств на плоскости, меру Жордана, рассмотреть свойства меры Жордана, на примерах показать, что для известных из школьного курса геометрии фигур мера Жордана равна площади этих фигур.

Особенности параграфа. В параграфе приводится чёткое и последовательное изложение теории меры Жордана на плоскости с точными определениями и примерами строгих доказательств. При определении измеримости по Жордану сразу же приводится пример, который показывает, что далеко не всякое множество точек плоскости измеримо по Жордану. Учитывая трудности приведённого определения измеримости по Жордану, формируется и доказывается признак измеримости, который обеспечивает конструктивный подход к определению меры Жордана с помощью пределов последовательностей.

Из свойств меры Жордана особо выделяются свойства монотонности и аддитивности, которыми обладают и другие рассматриваемые в математике меры множеств. С учётом того, что изучение теории меры непросто и требует значительных усилий, в качестве дополнительных задач и упражнений предлагаются задачи на повторение свойств геометрических фигур на плоскости и применение известных формул для вычисления площадей.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: палетка; элементарная фигура; площадь элементарной фигуры; свойства площади элементарных фигур.

Новые математические понятия: измеримость по Жордану; мера Жордана на плоскости; монотонность меры Жордана; аддитивность.

Вспомогательные математические понятия: пример множества на плоскости, не измеримого по Жордану.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Как доказать, что всякий отрезок, расположенный на оси Ox, имеет нулевую меру Жордана?

Ответ. Пусть a — отрезок, расположенный на оси Ox. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти элементарную фигуру F_ε, которая содержит отрезок a и площадь которой меньше ε. На первом и втором уровне можно ограничиться конкретными примерами. На третьем уровне можно рассмотреть следующее рассуждение. Пусть $A(a;\ 0)$ и $B(b;\ 0)$ — концы отрезка, причём $a < b$. Выберем целые числа p и q так, что $p < a$, $b < q$ и при этом $q - p > 0$. Далее, возьмём $\varepsilon > 0$. Из того, что $2^{-m} \to 0$ при $m \to \infty$, следует, что для каждого положительного числа δ найдётся число M, такое, что $2^{-m} < \delta$ при каждом $m > M$. В частности, если взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{q-p}$, то найдётся натуральное число k, такое, что $2^{-k} < \dfrac{\varepsilon}{q-p}$.

Тогда прямоугольник с вершинами $(p;\ 0)$, $(p;\ 2^{-k})$, $(q;\ 2^{-k})$, $(q;\ 0)$ является элементарной фигурой, которая содержит заданный отрезок. Площадь этого прямоугольника равна числу

$2^{-k} \cdot (q - p)$, для которого выполнено неравенство $2^{-k} \cdot (q - p) < \varepsilon$, поскольку $2^{-k} < \dfrac{\varepsilon}{q-p}$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти элементарную фигуру F_ε, которая содержит отрезок a и площадь которой меньше ε.

2.2.** Что можно сказать об измеримости дополнения к построенному множеству F до единичного квадрата E?

Ответ. Если H — дополнение к множеству F до единичного квадрата E, то $H'_n = \varnothing$ и $H''_n \supseteq H$ при любом натуральном n. Отсюда, как показано в пункте, следует неизмеримость по Жордану множества H.

2.3. Пусть фигура G содержится в фигуре F, мера Жордана которой равна нулю. Что можно сказать об измеримости G?

Ответ. Из того, что фигура F измерима и её площадь равна нулю, следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся элементарная фигура F_ε, для которой $S(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Но тогда $G'' \subset F \subset F_\varepsilon$ при каждом $\varepsilon > 0$, откуда следует, что $S(G) = 0$, а это означает, что фигура G измерима.

2.4. Почему любой многоугольник имеет площадь?

Ответ. Всякий прямоугольник F, стороны которого параллельны осям координат, имеет площадь. Поэтому всякий прямоугольник, равный F, имеет площадь. Отсюда следует, что всякий прямоугольный треугольник имеет площадь, поэтому и всякий треугольник также имеет площадь.

Рассмотрим теперь произвольный четырёхугольник F. Его можно представить в виде объединения двух треугольников G и H с общей стороной a. Аналогично тому, как это было сделано в пункте 2.1 для любого натурального числа n, рассмотрим для F, G и H соответственно элементарные фигуры F'_n, G'_n и H'_n, образованные всеми квадратами ранга n, целиком содержащиеся соответственно в фигурах F, G и H, а также элементарные фигуры F''_n, G''_n и H''_n, образованные всеми квадратами ранга n, имеющими соответственно с фигурами F, G и H хотя бы по одной общей точке. Заметим теперь, что при этом для площадей элементарных фигур выполняются соотношения:

$$S(G'_n) + S(H'_n) \le S(F'_n) \le S(F''_n) \le S(G''_n) \le S(H''_n).$$

Отсюда и из того, что G и H — измеримые фигуры, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S(G'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G''_n) = S(G)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(H'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(H''_n) = S(H)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(G'_n) + \lim\limits_{n\to\infty} S(H'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(G''_n) + \lim\limits_{n\to\infty} S(H''_n)$. Поэтому существуют и равны пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} S(F'_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S(F''_n)$. Таким образом, фигура F измерима по Жордану и, следовательно, имеет площадь.

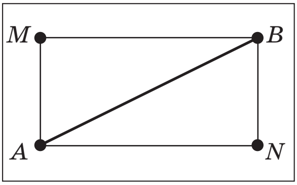
Рассуждение, приведённое для четырёхугольника, можно провести для любого многоугольника. Существенным элементом здесь является факт, что всякий многоугольник можно представить в виде объединения конечного числа треугольников без общих внутренних точек.

2.5. Как доказать, что всякий отрезок имеет нулевую меру Жордана?

Ответ. Первый способ. Если отрезок AB расположен на оси Ox, в ответе на вопрос к пункту 2.1 показано, что мера Жордана отрезка AB равна 0. Если отрезок AB не расположен на оси Ox, то на оси Ox всегда существует отрезок A_1B_1, равный отрезку AB. Отсюда и из того, что равные фигуры имеют равные меры Жордана, следует, что и в случае произвольного расположения отрезка AB его мера Жордана равна 0.

Второй способ. Этот способ основан на том, что известна формула площади любого прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям.

Пусть задан отрезок AB. Для любого натурального числа n через G_n обозначим пустое множество, то есть множество, в котором отсутствуют элементы. Ясно, что мера Жордана каждого из множеств G_n равна 0. Через H_1 обозначим прямоугольник $AMBN$, стороны которого параллельны координатным осям (см. рис.). Пусть площадь $S(H_1)$ фигуры H_1 равна числу p. Ясно, что отрезок AB является подмножеством фигуры H_1.



Разделив стороны прямоугольника $AMBN$ пополам и соединив точки деления, расположенные на противоположных сторонах прямоугольника, получим четыре прямоугольника площади $\frac{p}{4}$, два из которых содержат отрезок AB. Фигуру, образованную этими двумя прямоугольниками, содержащими отрезок AB, обозначим через H_2. Площадь $S(H_2)$ фигуры H_2 равна числу $2 \cdot \frac{p}{4} = \frac{p}{2}$. Следовательно, площадь AB не превосходит числа $\frac{p}{2}$.

Далее повторим эту процедуру последовательно с каждым прямоугольником, составляющим фигуру H_2, и получим фигуру H_3, составленную из четырёх равных прямоугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{p}{16}$, а площадь $S(H_3)$ фигуры H_3 равна числу $4 \cdot \frac{p}{16} = \frac{p}{4}$.

Продолжая эту процедуру, для каждого натурального числа n получим, что площадь фигуры H_n уменьшается в 2 раза по сравнению с предыдущей фигурой, и при этом фигура H_n содержит отрезок AB. В итоге площадь отрезка AB не превосходит числа $\frac{p}{2^n}$. Отсюда, из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{2^n} = 0$, получаем, что для отрезка AB построены две последовательности измеримых фигур G_n и H_n, для которых выполняются условия:

$$G_n \subseteq AB \subseteq H_n,\ \lim_{n\to\infty}(S(H_n) - S(G_n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{2^n} - 0\right) = 0.$$

Следовательно, отрезок AB — измеримая фигура и его площадь равна нулю.

2.6.** Как доказать измеримость треугольника ABC с вершинами $A(0;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C(2;\,0)$?

Ответ. Для всякого натурального числа n обозначим: через G_n — фигуру, составленную из всех квадратов ранга n, содержащихся в треугольнике ABC, через $S(G_n)$ — площадь фигуры G_n, через H_n — фигуру, составленную из всех квадратов ранга n, имеющих хотя бы одну общую точку с точками треугольника ABC, через $S(H_n)$ — площадь фигуры H_n.

В результате получим соотношения для площадей фигур:

$$S(G_1) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},\ S(G_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4},\ \ldots,$$

$$S(G_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

$$S(H_1) = 1 + \frac{1}{2},\ S(H_2) = 1 + \frac{1}{4},\ \ldots,\ S(H_n) = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Отсюда следует, что для последовательностей измеримых фигур G_n и H_n выполнены условия $G_n \subseteq \Delta ABC \subseteq H_n$ и

$$\lim_{n\to\infty}[S(H_n) - S(G_n)] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Таким образом, треугольник ABC — измеримая фигура.

2.7. Почему площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABC и ADC?

Ответ. См. ответ на вопрос к пункту 2.4.

2.8.** Как доказать, что пересечение измеримых фигур является измеримой фигурой?

Ответ. Пусть фигуры F и G измеримы. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению измеримости существуют последовательности элементарных фигур $F'_n \subset F \subset F''_n$, $G'_n \subset G \subset G''_n$, такие, что для всех достаточно больших n выполнены неравенства $S(F''_n) - S(F'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $S(G''_n) - S(G'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $H'_n = F'_n \overset{e}{\cap} G'_n$, $H''_n = F''_n \overset{e}{\cap} G''_n$. Тогда $H'_n \subset F \cap G \subset H''_n$, причём $H''_n - H'_n \subset (F''_n \overset{e}{-} F'_n) \cup (G''_n \overset{e}{-} G'_n)$. Поэтому

$$S(H''_n) - S(H'_n) = S(H''_n - H'_n) \le S(F''_n \overset{e}{-} F'_n) + S(G''_n \overset{e}{-} G'_n) =$$
$$= [S(F''_n) - S(F'_n)] + [S(G''_n) - S(G'_n)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу критерия измеримости фигура $F \cap G$ имеет площадь.

2.9. Как показать, что мера Жордана единичного квадрата равна 1?

Ответ. Мера Жордана единичного квадрата с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0) и (1; 1) равна 1. Отсюда и из того, что равные фигуры имеют равные меры Жордана, следует ответ на вопрос.

2.10. Чему равна площадь окружности?

Ответ. Пусть L — фиксированная окружность радиуса r. В пункте для круга радиуса r построены последовательность G_n многоугольников, содержащихся в круге, и последовательность H_n многоугольников, содержащих круг, таким образом, что $\lim\limits_{n\to\infty} S(H_n - G_n) = 0$. Но тогда последовательность разностей $(H_n \backslash G_n)$ многоугольников с добавленной границей многоугольника G_n содержит окружность, и $\lim\limits_{n\to\infty} S(H_n - G_n) = 0$. Поэтому окружность измерима по Жордану и её площадь равна нулю.

Указания к решению наиболее трудных задач

2.* Площадь остроугольного треугольника ABC равна 12, его медианы AN и CM имеют длину 6 и $3\sqrt{2}$ соответственно. Найдите стороны треугольника ABC.

Указание. Если P — точка пересечения медиан, то $AP = 4$, $CP = 2\sqrt{2}$ и площадь треугольника APC равна одной трети от площади треугольника ABC, то есть равна 4. В то же время $S_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin\alpha$, где α — угол между сторонами AP и PC этого треугольника. Отсюда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Эти данные позволяют вычислить синус угла между медианами AN и CM.

5. Боковая сторона AD трапеции $ABCD$ перпендикулярна основаниям AB и CD, $AB = 3$, $CD = 1$. Окружность, построенная на стороне BC как на диаметре, касается стороны AD. Найдите площадь трапеции.

Указание. Радиус окружности равен средней линии трапеции.

6.* Найдите, при каком значении высоты равнобедренная трапеция с острым углом 45° и периметром 8 имеет наибольшую площадь.

Указание. Если a и b основания заданной трапеции, где $a > b > 0$, то для её периметра выполняется равенство $8 = b + a + \sqrt{2}(a - b)$, то есть $(\sqrt{2} - 1)b = (\sqrt{2} - 1)a - 8$, откуда $b = \frac{(\sqrt{2}+1) \cdot a - 8}{(\sqrt{2} - 1)} = ((2\sqrt{2} + 3)a - 8 - 8\sqrt{2})$. Поскольку высота трапеции $\frac{a-b}{2}$, площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot \frac{(a-b)}{2} =$ $= \frac{1}{4} \cdot (a^2 - b^2) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 - ((2\sqrt{2} + 3)a - 8 - 8\sqrt{2}))^2)$. Далее нужно найти максимум полученной квадратичной функции.

8.* Внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a выбрана точка M так, что площади треугольников ABM, ACM и BCM пропорциональны числам 1, 2 и 3 соответственно. Найдите длину отрезка AM.

Указание. Если через точку M провести прямые, параллельные сторонам треугольника, то вычисляются все отрезки этих прямых, заключённые между сторонами треугольника.

9.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает её в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что $AE = 2DE$?

Указание. Если M — точка пересечения прямых AD и BC, то $AE = EM$ и $DE = DM$.

10.** На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{2}$. Прямая l — общая касательная этих окружностей. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к l точка пересечения окружностей.

Указание. Воспользоваться двумя результатами: а) отрезок общей касательной имеет длину 2; б) если O_1, O_2 — центры, и M — точка пересечения окружностей, то угол O_1O_2M прямой.

14.** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ таковы, что $AD = 3BC$. На сторонах AB и CD выбраны точки M и N так, что $BM = 2AM$ и прямая MN делит площадь трапеции пополам. Найдите отношение $CN : ND$.

Указание. Отношение отрезков CN и ND равно отношению площадей треугольников MCN и MDN.

16.** Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E так, что угол BEC прямой. Найдите площадь треугольника BCE, если известно, что $BC = \sqrt{10}$, а расстояние от центра квадрата до точки E равно 1.

Указание. На каждой из сторон заданного квадрата можно построить треугольник, равный треугольнику BCE, причём так, что внутри образуется малый квадрат. Так как длину диагонали малого квадрата можно найти из условия, то быстро находятся площади обоих квадратов, а площадь треугольника равна одной четверти от разности площадей квадратов.

17.** В равнобедренной трапеции $ABCD$ угол при вершине A равен $60°$, а длина диагонали AC равна $2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если известно, что прямая, параллельная AC и делящая площадь трапеции пополам, пересекает трапецию по отрезку, длина которого равна 3.

Указание. Пусть MN — отрезок прямой с концами на сторонах трапеции. Тогда отношение площади треугольника ACD к площади треугольника MDN равно $(AC : MN)^2 = 4 : 3$.

18.** В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Известно, что биссектриса угла C параллелограмма делит треугольник AMD на две части равной площади. Найдите длину стороны AD, если $CD = 4$.

Указание. Пусть биссектриса угла C параллелограмма пересекает сторону AD в точке L и отрезок AM в точке P. Тогда $DL = DC = 4$. Обозначив AL через x, можно выразить отношения $AL : AD$ и $AP : AM$ через x, а после этого и отношение площади треугольника APL к площади треугольника AMD. Из условия следует, что отношение площадей этих треугольников равно $\frac{1}{2}$, что позволяет составить уравнение для нахождения x.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Чему равна площадь треугольника ABC с вершинами $A(-3; -4)$, $B(1; -4)$, $C(-1; -5)$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Указание. Одна из сторон треугольника параллельна оси абсцисс.

1.4. Чему равна площадь трапеции $ABCD$ с вершинами $A(5; 1)$, $B(7; 4)$, $C(9; 4)$, $D(12; 1)$?

1) 12,5 2) 13,5 3) 14,5 4) 15,5

Указание. Основания трапеции параллельны оси абсцисс.

2.2. Какие из указанных плоских фигур измеримы по Жордану?

1) треугольник со всеми внутренними точками

2) квадрат со всеми внутренними точками

3) четырёхугольник со всеми внутренними точками

4) подмножество F единичного квадрата, который задаётся как $E = \{(x; y)$: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, где x, y — рациональные числа$\}$

Указание. Подмножество из варианта 4 рассматривалось в учебнике как пример множества, неизмеримого по Жордану.

2.3.* Какие из указанных пределов равны 1?

1) $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ 2) $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$ 3) $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$ 4) $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

Указание. Предел из варианта 1 равен 1, что изучалось в 10 классе. Отсюда по правилам вычисления пределов можно сделать вывод, что варианты 3 и 4 также подходят. Вариант 2 не подходит, поскольку $\dfrac{1 - \cos x}{x} = \left(2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right) : x$.

§ 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Цель параграфа — на основе измерения площадей плоских фигур ввести понятие определённого интеграла.

Особенности параграфа. В качестве отправной точки для изложения теории определённого интеграла выбраны понятия измеримости и площади плоских фигур, которые изучались в предыдущей главе. Это позволяет продемонстрировать метод исчерпывания при вычислении площадей некоторых криволинейных трапеций и тем самым обеспечить переход к обобщению, вводя понятие интегральной суммы, что является основой при многих современных подходах к теории интегрирования.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагаются известными: свойства пределов последовательностей и функций, понятие площади плоской фигуры и свойства площадей.

Новые математические понятия: криволинейная трапеция; определённый интеграл; интегральная сумма.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Как доказать, что для функции $f(x) = 2x + 3$ существует определённый интеграл по промежутку [4; 5]?

Ответ. В этом случае криволинейная трапеция является обычной трапецией, а существование площади любого многоугольника уже предполагается известным.

3.2. Чему равен $\int\limits_0^1 xdx$?

Ответ. Разбивая при каждом натуральном $n > 1$ отрезок [0; 1] точками $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, ..., $x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, $x_n = 1$ и рассматривая фигуры из прямоугольников, аналогичные тем, которые были в этом пункте, используя для натурального числа m формулу $1 + 2 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$, для внутренней фигуры F_n получим, что $S(F_n) = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + (n-1)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, а для внешней фигуры G_n получим, что $S(G_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n-1}{n} + 1\right) = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + (n-1) + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S(G_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(F_n) = \frac{1}{2}$.

3.3. К чему приближаются интегральные суммы для функции $f(x) = -x$ на отрезке [0; 2] при разбиении этого отрезка на всё более мелкие равные части?

Ответ. При каждом разбиении отрезка [0; 2] на части составим интегральные суммы Σ_n для $f(x) = -x$ и Ω_n, для $h(x) = x$ с одинаковым выбором внутренних точек. Тогда $\Sigma_n = -\Omega_n$, а так как известно, что интегральные суммы Ω_n приближаются к числу 2, то интегральные суммы Σ_n приближаются к числу (-2).

3.4. Чему равна площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ и графиком функции $f(x) = x - 2$?

Ответ. Данная фигура равна криволинейной трапеции, которая ограничена прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ и графиком функции $g(x) = 2 - x$. Для функции $g(x) = 2 - x$ первообразную $G(x)$ можно записать в виде $G(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$, где C — некоторая постоянная. Поэтому если S — площадь криволинейной трапеции, то $S = G(2) - G(1) = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3.5.* Как доказать, что значение площади криволинейной трапеции не зависит от выбора первообразной для функции $f(x)$?

Ответ. Если $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Поэтому $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(b)$, то есть значение площади криволинейной трапеции не зависит от выбора первообразной для функции $f(x)$.

3.6. Чему равно значение $\int\limits_0^5 (x-3)^2 dx$?

Ответ. $\int\limits_0^5 (x-3)^2 dx = \frac{(x-3)^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{(5-3)^3}{3} - \frac{(1-3)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

3.7. Как вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2$?

Ответ. Из площади прямоугольника с вершинами $(\sqrt{2};\ 0)$, $(-\sqrt{2};\ 2)$, $(\sqrt{2};\ 2)$, $(\sqrt{2};\ 0)$ вычтем площадь криволинейной трапеции с границей $f(x) = x^2$ на отрезке $[\sqrt{2};\ 2]$. В результате получим $2\sqrt{2} \cdot 2 - \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx = 4\sqrt{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3} + \frac{(-\sqrt{2})^3}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

3.8. Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = 1 + x - x^2$?

Ответ. Для нахождения абсцисс точек пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ составим уравнение $f(x) = g(x)$, которое равносильно уравненям $x^2 = 1 + x - x^2$, $2x^2 - x - 1 = 0$. Корни последнего уравнения $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Далее заметим, что на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$ выполняется неравенство $g(x) \geq f(x)$. С помощью формулы, приведённой в данном пункте, получим, что площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = 1 + x - x^2$, равна

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} g(x)dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1 + x - 2x^2)dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) = 1\frac{1}{8}.$$

3.9. Как доказать правила I и II?

Ответ. Способ 1. Для доказательства достаточно записать интегральные суммы левых и правых частей и сравнить их.

Способ 2. Воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница.

3.10.** Чему равен $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$?

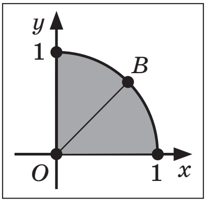


Рис. 1

Ответ. Заметим, что график функции $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ на отрезке $[0; 1]$ есть четверть окружности (рис. 1). Если через $G(x)$ обозначим первообразную для $f(x)$, то, с одной стороны, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = G(1) - G(0)$, а с другой стороны, этот интеграл равен площади четверти круга, выделенной на рис. 1.

Следовательно, данный интеграл равен $\frac{\pi}{4}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3. Найдите значение определённого интеграла:

а) $\int_1^2 x^2dx$; б) $\int_2^4 x^3dx$; в) $\int_0^2 (x - 1)^2dx$; г) $\int_{-1}^1 x^2dx$;

д) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$; е) $\int_2^4 \frac{dx}{x^3}$; ё) $\int_0^1 \sqrt{x}dx$; ж) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Указание. в) Сделав чертёж, можно увидеть, что $\int_0^2 (x - 1)^2dx = 2 \cdot \int_1^2 x^2dx$.

г) Сделав чертёж, можно увидеть, что $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = 2 \cdot \int\limits_{0}^{1} x^2 dx$.

ё) Поскольку функция $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ является первообразной функции $f(x) = \sqrt{x}$, то $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

ж) Поскольку функция $F(x) = 2\sqrt{x}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2$.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f(x) = x$, $g(x) = 2x + x^2$;
б) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x - 1$;
в) $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = 4 - x - x^2$;
г) $f(x) = 2(x - x^2)$, $g(x) = 1 - x$;
д) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^2 + x$;
е) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^2 + x + 2$;
ё) $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$;
ж) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$, $g(x) = x^2 + 2x$.

Указание. В каждой из задач изобразите графики и найдите координаты точек пересечения.

Аналогично следует поступать при решении задачи 7**.

9.** Найдите, в каком отношении парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ делит площадь круга $x^2 + y^2 \leq 8$.

Указание. Вычислив координаты точек пересечения параболы с границей круга (рис. 2), получим $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ 2)$ и $\angle AOB = 90°$. Следовательно, площадь большей из частей можно вычислить как сумму площади криволинейной трапеции с границей $2y = x^2$ в пределах от -2 до 2, площади сегмента с хордой AD и площади полукруга. В итоге получим $S_1 = \frac{4}{3}(2\pi - 4) + 4\pi = 6\pi - \frac{4}{3}$, $S_2 = 8\pi - S_1 = 2\pi + \frac{4}{3}$, $S_2 : S_1 = (3\pi + 2) : (9\pi - 2)$.

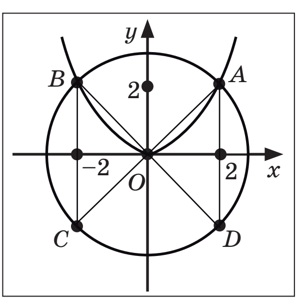


Рис. 2

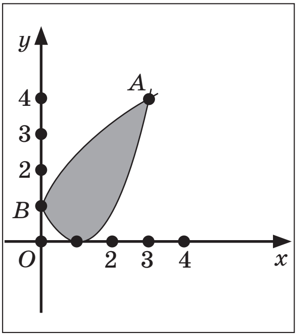


Рис. 3

10.** Найдите площадь фигуры, которая в координатной плоскости задана двумя неравенствами: $5x + 1 \geq y^2$, $y - 1 \geq x^2 - 2x$.

Указание. Сделав рисунок (рис. 3), видим, что эта фигура ограничена графиками функций $f(x) = (x - 1)^2$ и $g(x) = \sqrt{5x+1}$. Затем проверяем, что наблюдаемые координаты точек пересечения графиков являются точными, то есть $A(0;\ 1)$, $B(3;\ 4)$. В итоге искомую площадь можно вычислить следующим образом:

$$S = \int_0^3 \left(\sqrt{5x+1} - (x-1)^2\right)dx.$$

11.** Вычислите с помощью интегральных сумм:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{2n} + \sin\dfrac{2\pi}{2n} + \sin\dfrac{3\pi}{2n} + \ldots + \sin\dfrac{n\pi}{2n}\right)$.

Указание. а) Члены последовательности являются некоторыми интегральными суммами функции $f(x) = x^4$ на промежутке $[0;\ 1]$; б) члены последовательности являются некоторыми интегральными суммами функции $f(x) = x^5$ на промежутке $[0;\ 1]$; в) члены последовательности являются некоторыми интегральными суммами функции $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[0;\ 1]$; г) члены последовательности являются некоторыми интегральными суммами функции $f(x) = \sin x$ на промежутке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.3. Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = 2x^2 - 1$ и $g(x) = 2 - x^2$?

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

Указание. Площадь равна $\int_{-1}^{1}(3-3x^2)dx$.

2.1. Какие из следующих фигур являются криволинейными трапециями?

1) ограниченная прямыми $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ и кривой $y = x^2 + 7$

2) ограниченная прямыми $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ и кривой $y = x^2 - 7$

3) ограниченная прямыми $x = 7$, $x = 10$, $y = 0$ и кривой $y = x^2 + 1$

4) ограниченная прямыми $2x = 7$, $3x = 10$, $y = 0$ и кривой $y = 27x^2 + 100$

Указание. Функция, ограничивающая на некотором промежутке криволинейную трапецию, должна быть неотрицательной на этом промежутке.

2.2. Рассмотрим разбиение отрезка [0; 3] точками $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Какие из приведённых выражений являются записью некоторой интегральной суммы для функции $f(x) = x^2$ на отрезке [0; 3]?

1) $(x_2 - x_1) \cdot 0 + (x_3 - x_2) \cdot 1 + (x_4 - x_3) \cdot 4$
2) $(x_2 - x_1) \cdot 1 + (x_3 - x_2) \cdot 4 + (x_4 - x_3) \cdot 9$
3) $(x_2 - x_1) \cdot 1 + (x_3 - x_2) \cdot 2 + (x_4 - x_3) \cdot 3$
4) $(x_2 - x_1) \cdot 0 + (x_3 - x_2) \cdot 3 + (x_4 - x_3) \cdot 6$

Указание. При заданном разбиении у интегральных сумм значения функции на каждом отрезке $[x_i;\ x_{i+1}]$ выбираются в пределах от x_i^2 до x_{i+1}^2.

2.4. Площади каких фигур больше 2?

1) ограниченной в пределах от 0 до π линиями $y = 0{,}5\sin x$, $y = -0{,}5\sin x$

2) ограниченной в пределах от 0 до π линиями $y = \sin x$, $y = -\sin x$

3) ограниченной в пределах от 0 до π линиями $y = 1{,}5\sin x$, $y = -1{,}5\sin x$

4) ограниченной в пределах от 0 до π линиями $y = 2\sin x$, $y = -2\sin x$

Указание. Если найти площадь фигуры из варианта 1, то площади из остальных вариантов находятся практически мгновенно.

§ 4. ОБЪЁМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Цель параграфа — определить в пространстве измеримость по Жордану, меру Жордана, рассмотреть свойства меры Жордана, изучить некоторые формулы для вычисления объёмов пространственных фигур.

Особенности параграфа. С учётом того, что на плоскости мера Жордана рассмотрена довольно подробно, при переходе к изучению меры Жордана в пространстве излагается только схема построения теории со ссылками на аналогии с теорией меры на плоскости. Затем изучаются основные формулы вычисления объёмов, основанные на применении формулы Ньютона — Лейбница. В качестве дополнительных задач и упражнений предлагаются также задачи на повторение свойств пространственных тел и применение наиболее распространённых формул для вычисления объёмов многогранников и других пространственных тел.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: мера Жордана на плоскости и её свойства; определённый интеграл; формула Ньютона — Лейбница.

Новые математические понятия: измеримость по Жордану в пространстве; мера Жордана в пространстве; формула вычисления объёма через функцию, которая задаёт площади сечений пространственных фигур плоскостями, перпендикулярными некоторой числовой оси; формула вычисления объёма фигуры вращения.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Для каких геометрических тел вам известны формулы вычисления объёмов?

Ответ. Вообще говоря, в предыдущем курсе приводились формулы вычисления объёмов многих тел: параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

4.2. Как проверить аддитивность и монотонность меры Жордана для элементарных фигур?

Ответ. В точности провести аналогию с плоским случаем, так как в пространстве для доказательства этих свойств меры Жордана для каждой измеримой фигуры также приходится рассматривать последовательность элементарных фигур, содержащих заданную фигуру, и последовательность вложенных элементарных фигур.

4.3. Чему равна пространственная мера Жордана квадрата с вершинами $A(0; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(1; 1; 0)$?

Ответ. По аналогии с отрезком для этого квадрата можно построить последовательности элементарных пространственных фигур, содержащихся в квадрате, и элементарных фигур, содержащих рассматриваемый квадрат, таким образом, что для каждой из последовательностей пределы последовательностей мер Жордана равны 0.

4.4. Почему любой прямоугольный параллелепипед является измеримым по Жордану?

Ответ. Сначала доказываем, что мера Жордана для любого прямоугольного параллелепипеда, стороны которого параллельны соответствующим координатным осям, совпадает с его объёмом в обычном смысле. А затем пользуемся тем, что равные фигуры имеют равные меры Жордана.

4.5. Как вывести формулу для вычисления объёма прямой треугольной призмы?

Ответ. Использовать аналогию с мерой Жордана на плоскости. Для прямой треугольной призмы A построить последовательности элементарных фигур F_n и G_n , для которых выполняются свойства: $F_n \subseteq A \subseteq G_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} V(F_n \setminus G_n) = 0$.

4.6. Как показать, что мера Жордана единичного куба равна 1?

Ответ. Для единичного куба, стороны которого соответственно параллельны осям, это свойство выполняется по определению. Далее используем то, что равные фигуры имеют равные меры Жордана.

4.7. Чему равен объём прямой призмы высоты h, в основании которой лежит многоугольник площади S?

Ответ. $V = S \cdot h$.

4.8. Как вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известны площадь основания $ABCD$, боковое ребро AA_1 и угол, который образует боковое ребро с плоскостью основания?

Ответ. Пусть площадь основания $ABCD$ равна S, длина бокового ребра AA_1 равна a, угол между прямой AA_1 и плоскостью $ABCD$ равен φ. Через точку A перпендикулярно плоскости $ABCD$ проведём прямую m и введём на ней систему координат так, что точка A имеет координату 0, а проекция A_1 точки A на прямую m положительна. В этом случае координата проекции A_1 на прямую m равна $a\sin\varphi$. Далее заметим, что для $0 \le x \le a\sin\varphi$ площади сечений параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной прямой m и проходящей через точку с координатой x оси m, равны S независимо от выбора числа x. При остальных значениях x соответствующие сечения пусты. Следовательно, по основной формуле $V = \int\limits_0^{a\sin\varphi} S dx = Sx\Big|_0^{a\sin\varphi} = a \cdot S \cdot \sin\varphi$.

4.9. Чему равен объём треугольной пирамиды, у которой боковые рёбра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b, c?

Ответ. $V = \frac{1}{6}abc$.

4.10. Как доказать, что если прямой круговой цилиндр имеет высоту H и радиус основания R, то объём цилиндра можно вычислить по формуле $V = \pi R^2 H$?

Ответ. Цилиндр с высотой H и радиусом основания R можно представить как тело вращения, образуемое вращением криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{R}{H}$ для значений переменной $x \in [0; H]$. Поэтому $V = \pi \int\limits_0^H \frac{R^2}{H^2} dx = \pi \frac{R^2}{H^2} x\Big|_0^H = \pi R^2 H$.

4.11. Как принцип Кавальери связан с формулой объёма тела вращения из пункта 4.10?

Ответ. Если для двух тел, имеющих объём, при вычислении объёма с помощью интеграла под знаком интеграла стоит одна и та же функция и пределы интегрирования одинаковы, то объёмы этих тел равны.

Указания к решению наиболее трудных задач

5.** В треугольной пирамиде $ABCD$ рёбра AB и CD имеют длину 6, все остальные рёбра имеют длину $\sqrt{34}$. Найдите объём тела, которое получается вращением пирамиды $ABCD$ относительно оси, проходящей через середины рёбер AB и CD.

Указание. Пусть точки M и N — середины рёбер AB и CD. Из условия следует, что $MN = 4$. Введём на оси вращения MN координаты так, что точка M является началом системы координат, а точка N имеет координату 4. Через точку F оси MN с координатой x проведём плоскость, перпендикулярную MN, которая пересекает пирамиду по прямоугольнику $PQRT$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с F (рис. 1). Выражая стороны четырёхугольника через x, получим $PQ = RT = \frac{3}{2}x$, $PT = RQ = \frac{3}{2}(4 - x)$, $PR^2 = \frac{9}{4}(x^2 + (4 - x)^2)$.

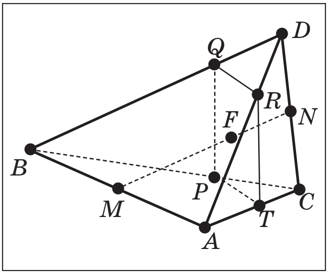


Рис. 1

Так как при вращении прямоугольника $PQRT$ вокруг оси MN получается круг радиуса FR, то по формуле объёма фигуры вращения находим

$$V = \frac{9\pi}{16}\int_0^{\sqrt{119}}(2x^2 - 8x + 16)dx = \frac{9\pi}{16}\left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^4 = 24\pi.$$

6.** Найдите объём тела, которое получается вращением единичного куба относительно оси, проходящей через середины двух параллельных рёбер куба и не принадлежащих одной грани.

Указание. Пусть точки M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 (рис. 2). Плоскость BB_1D_1D перпендикулярна оси вращения MN и делит куб на две равные фигуры. Поэтому искомый объём в 2 раза больше объёма фигуры вращения $ABDA_1B_1D_1$ вокруг оси MN. Введём на оси вращения координаты так, что точка M является началом системы координат, а точка K имеет координату $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Через точку F оси MK с координатой x проведём плоскость, перпендикулярную MK, которая пересекает куб по прямоугольнику $PQRT$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с точкой F. Далее находим, что $PQ = RT = 1$, $QR = PT = 2x$, $PR^2 = 1 + 4x^2$. Так как при вращении прямоугольника $PQRT$ вокруг оси MK получается круг радиуса FR, то объём фигуры,

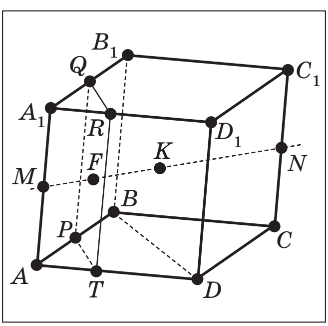


Рис. 2

полученной вращением половины куба относительно оси MN, находим по известной формуле:

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{4}(1 + 4x^2)dx = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{6}.$$

7.** Найдите объём пересечения двух цилиндров радиуса r, оси которых пересекаются и перпендикулярны (предполагается, что основания каждого из цилиндров не имеют общих точек с другим цилиндром).

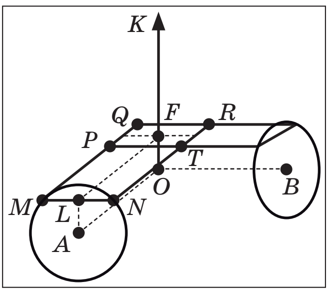


Рис. 3

Указание. Через точку O пересечения осей AO, BO цилиндров перпендикулярно плоскости AOB проведём ось OK так, как изображено на рис. 3. Затем через точку F оси OK с координатой x и перпендикулярно этой оси проведём сечение, которое каждый из цилиндров пересекает по прямоугольнику, а пересечение цилиндров — по квадрату $PQRT$. Выражая сторону квадрата через x, получим $PT^2 = MN^2 = 4(r^2 - x^2)$, поэтому площадь сечения $S(x) = 4(r^2 - x^2)$. По основной формуле объёма находим:

$$V = \int_{-r}^{r} S(x)dx = \int_{-r}^{r}(r^2 - x^2) = 4\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \frac{16}{3}r^3.$$

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка M — середина ребра AB, точка N — середина ребра B_1C_1. Через прямые B_1M и BN проведены параллельные плоскости. Найдите объём части куба, содержащейся между этими плоскостями.

Указание. Рассматриваемые плоскости разделяют куб на две равные усечённые пирамиды и многогранник, объём которого требуется найти.

12.* В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$, $AC = 4$, боковые рёбра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M и N так, что $CM = 1$, $CN = 6$; на луче BS выбраны точки P и Q так, что $BP = 2$, $BQ = 5$. Найдите объём пирамиды $MNPQ$.

Указание. Объём пирамиды, у которой два ребра выбираются на двух заданных скрещивающихся прямых, зависит только от длин этих рёбер, а не от того, как они расположены на заданных прямых.

13.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S через середины рёбер AB, AD и SC проведено сечение. Известно, что площадь сечения равна $2\sqrt{2}$, а плоскость сечения образует с плоскостью основания $ABCD$ угол в $45°$. Найдите объём данной пирамиды.

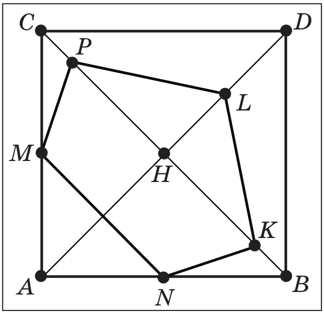


Рис. 4

Указание. У этой пирамиды высота равна диагонали основания, а при ортогональном проектировании сечения на плоскость основания получается пятиугольник $MNKLP$, изображённый на рис. 4, где $DL = \frac{1}{2}DH$, $CP = \frac{1}{4}CH$, $BK = \frac{1}{4}BH$.

15. Из жестяного круга радиуса 10 см вырезали сектор с углом $90°$ и из оставшейся части сделали воронку конической формы. Сколько воды можно налить в такую воронку?

Указание. Радиус основания получаемого конуса равен 7,5 см.

19.* Куб, ребро которого равно a, срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определите объём получившегося многогранника.

Указание. Отрезаемые части являются правильными треугольными пирамидами, у которых боковые рёбра попарно перпендикулярны и равны $a \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

20.** В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Через середины рёбер AB, AD и SC проведена плоскость. Найдите отношение объёмов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Указание. Прежде всего, секущая плоскость пресекает плоскость SBD по прямой, параллельной прямой BD. Отсюда можно вывести, что искомое отношение такое же, что и отношение объёмов частей, на которые заданная плоскость разбивает треугольную пирамиду $SABC$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Чему равен объём тела, получаемого при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции с границей $y = \sin x$ в пределах от 0 до π?

1) $\frac{\pi\cdot(\pi-1)}{4}$ 2) $\frac{\pi^2}{2}$ 3) $\frac{\pi^2}{4}$ 4) $\frac{\pi\cdot(\pi-1)}{2}$

Указание. Одной из первообразных функции $f(x) = \sin^2 x$ является функция $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

2.1. В координатном пространстве фигуру G получают из элементарной фигуры F параллельным переносом, который задаётся вектором $\vec{n}$. В каких из указанных случаев фигура G является элементарной фигурой, если:

1) $\vec{n} = (5; -2; 3)$ 2) $\vec{n} = (2{,}5; -2{,}5; 3{,}5)$

3) $\vec{n} = (3{,}2; 1{,}3; -2{,}4)$ 4) $\vec{n} = \left(\sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}\right)$

Указание. Координатами вершин элементарных фигур являются дробные числа, которые в несократимом виде имеют знаменатель, равный степени числа 2.

2.3. Укажите те из тел, объём которых больше объёма конуса с радиусом основания 2 и высотой 5.

1) тело высоты 4 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания $S(h) = \pi h^2 + 1$

2) тело высоты 6 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания $S(h) = 3h^2$

3) тело высоты 5 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания $S(h) = \sin \pi h + 2$

4) тело высоты 5 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания $S(h) = h^3 + 1$

Указание. Сравнить с числом $\frac{20\pi}{3}$ значения четырёх определённых интегралов: $\int_0^4(\pi h^2 + 1)dh$, $\int_0^6 3h^2 \cdot dh$, $\int_0^4(\sin\pi h^2 + 2)dh$, $\int_0^5(h^3 + 1)dh$.

Глава 10
УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Цель главы — ознакомиться с понятием условной вероятности, рассмотреть произведение событий, изучить некоторые правила для вычисления условных вероятностей и вероятностей произведения событий, рассмотреть примеры задач на вычисление вероятностей достаточно сложных событий.

Особенности главы. Изучаемые в главе понятия и правила являются непривычными и сложными. Дело в том, что понятия «вероятность произведения событий» и «условная вероятность» настолько взаимосвязаны, что в каждой конкретной ситуации часто трудно определить, что можно найти в первую очередь, и всё зависит от особенностей задачи. В связи с этим выделяется особый случай, когда рассматриваемые события независимы, что приводит как к простому способу нахождения условных вероятностей, так и нахождению вероятности произведения событий. Часто независимость событий возникает тогда, когда многократно воспроизводится один и тот же эксперимент. При работе с данным материалом особое значение имеют рассматриваемые в тексте примеры.

§ 1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОДСЧЁТА УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель параграфа — ознакомиться с понятием условной вероятности.

Особенность параграфа. В эксперименте со случайным выбором элемента из рассматриваемого множества Ω смысл условной вероятности события A при условии, что произошло событие H, состоит в том, что в этом случае изменяют поле всевозможных исходов эксперимента на множество $H \subseteq \Omega$, и уже на этом поле событий определяют вероятность события $A \cap H$. Этот смысл и разъясняется в тексте на конкретных примерах.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: поле событий; событие как подмножество поля событий; вероятность события; произведение (пересечение) событий.

Новые математические понятия: условная вероятность события A при условии, что произошло событие H.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Во время тиража «Спортлото 5 из 36» изображение на экране телевизора исказилось. На первом вынутом шаре вы сумели разглядеть лишь то, что его номер — двузначный. Какова вероятность, что вы угадали номер вынутого шара, если среди пяти записанных вами номеров ровно два номера однозначных?

Ответ. Всего двузначных номеров 27, а среди записанных игроком номеров содержится три двузначных номера. Поэтому вероятность указанного события $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

1.2. С какой вероятностью на выборах, о которых шла речь в примере 2, избиратели проголосуют против всех кандидатов?

Ответ. На выборы избиратели приходят с вероятностью 0,75, а против всех кандидатов собираются голосовать с вероятностью 0,05, причём указано, что все они из числа пришедших на выборы. Поэтому искомая условная вероятность равна $\frac{0{,}05}{0{,}75}=\frac{1}{25}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

4. Пусть эксперимент заключается в подбрасывании монеты. Какова вероятность того, что при втором бросании выпадет орёл, если известно, что при первом бросании выпала решка?

Указание. При втором подбрасывании монеты всего два возможных равновероятных исхода, и нас интересует появление только одного из них.

5. В магазин завезли 1000 лампочек, из которых 400 произведено на первом заводе, и среди них 20 бракованных; 600 произведено на втором заводе, и среди них 10 бракованных. Какова вероятность купить хорошую лампочку, если известно, что эта лампочка с первого завода?

Указание. Задача эквивалентна тому, что нас интересует появление одного из $400-20$ элементов множества при выборе из множества, содержащего 400 элементов.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. На выбранном диаметре AB окружности случайным образом выбрали точку и провели через неё хорду перпендикулярно AB. Какова вероятность того, что длина хорды больше радиуса окружности?

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Указание. Длина хорды больше радиуса R окружности, если расстояние от середины хорды до центра окружности меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}R$.

2.3. Из 20 экзаменационных билетов студент плохо знает 7-й. Какой может быть условная вероятность вытянуть «плохой» билет, если до него билеты взяли 5 человек?

1) $\frac{2}{15}$ 2) $\frac{4}{15}$ 3) $\frac{6}{15}$ 4) $\frac{8}{15}$

Указание. На столе экзаменатора может остаться от 2 до 7 «плохих» билетов из 15.

2.4. Какие из условных вероятностей всегда равны 1?

1) $P(B \mid A + B)$, если $P(A + B) > 0$ 2) $P(B \mid B)$, если $P(B) > 0$
3) $P(B \mid A + B)$, если $P(A + B) > 0$ 4) $P(B \mid AB)$, если $P(AB) > 0$

Указание. $P(B \mid H) = 1$ только в тех случаях, когда $B \subseteq H$.

§ 2. ФОРМУЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель параграфа — изучить формулу для вычисления вероятности одновременного происхождения нескольких событий через вероятность одного из этих событий и условные вероятности остальных событий.

Особенности параграфа. В параграфе рассматриваются основные формулы для вычисления вероятностей одновременного происхождения двух или нескольких событий, то есть вероятностей произведения событий. И здесь важно хорошо разобраться с вычислением вероятности произведения двух событий, так как на таком результате основываются все последующие рассуждения.

С теоретической точки зрения формула произведения вероятностей получается простым преобразованием формулы условной вероятности. Однако при этом существенно изменяется смысл полученного результата. Если сама формула для условной вероятности события A при выполнении события B фактически совпадает с определением условной вероятности $P(A|B)$, то получающаяся формула произведения вероятностей предназначена для того, чтобы по двум заданным вероятностям $P(A)$ и $P(A|B)$ вычислять вероятность события $A \cap B$, то есть вероятность одновременного происхождения событий A и B.

Ещё одно важное понятие, которое рассматривается в данном параграфе, — это независимость событий. В теории вероятностей события считаются независимыми, когда вероятность появления одного какого-то события никак не зависит от того, произошли или нет остальные из указанных событий. Оказывается, что чаще всего независимость некоторых событий приходится постулировать, то есть принимать безо всяких обоснований. Основанием для этого могут служить не поддающиеся точному описанию ссылки на то, что между этими событиями не видно какой-либо причинной зависимости. И именно на это обстоятельство следует обратить особое внимание при изучении независимости событий, иллюстрируя общие рассуждения конкретными примерами. Одним из классических примеров является вторичное проведение некоторого эксперимента с сохранением всех начальных условий. Например, при двукратном подбрасывании монеты вероятность появления орла при втором подбрасывании никак не должна зависеть от результата первого подбрасывания.

В параграфе приведено соответствующее математическое определение независимости событий. Однако смысл этого определения непростой, и требуются значительные усилия, чтобы его освоить. Более простым, естественным и наиболее нужным является основное свойство независимых событий. А именно: когда события независимы, то вероятность одновременного происхождения этих событий, то есть вероятность их произведения, равна произведению их вероятностей. На это свойство независимых событий и следует обратить внимание в первую очередь.

Материал данного параграфа непростой. Поэтому на первом уровне предполагается изучение только формулы для вычисления вероятности произведения двух событий. На втором и третьем уровне рассматриваются обобщения этой формулы.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: поле событий; событие как подмножество поля событий; вероятность события; произведение событий; условная вероятность.

Новые математические понятия: формула произведения вероятностей; независимость событий; формула вероятности произведения независимых событий.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Чему равна вероятность не угадать ни один из первых двух номеров в «Спортлото 5 из 36»?

Ответ. Вероятность не угадать первый номер равна $\frac{31}{36}$. При условии, что это событие произошло, вероятность не угадать второй номер равна $\frac{30}{35} = \frac{6}{7}$. Вероятность не угадать ни один из первых двух номеров по формуле произведения вероятностей равна $\frac{31}{36} \cdot \frac{6}{7} = \frac{31}{42}$.

2.2.* Что вероятнее в «Спортлото 5 из 36»: угадать хотя бы один номер из пяти или не угадать ни одного номера?

Ответ. Обозначим через A событие, когда ни один из пяти номеров не угадан. Аналогично тому, как рассмотрено в пункте, получим, что $P(A) = \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{35} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{5}{33} \cdot \frac{5}{32}$. Нетрудно установить, что $P(A) < \frac{1}{2}$. Событие, когда угадан хотя бы один номер из пяти, является дополнением $\overline{A}$ к событию A. Поэтому $P(\overline{A}) = 1 - P(A) > \frac{1}{2}$. Следовательно, более вероятно угадать хотя бы один номер из пяти.

2.3.** Чему равна вероятность вытащить подряд три чёрных шара из урны, в которой лежат 20 белых и 5 чёрных шаров?

Ответ. Применяя формулу произведения вероятностей, получим $\frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} = \frac{1}{230}$.

2.4. Чему равна вероятность того, что при двух подбрасываниях игральной кости оба раза выпадет по 6 очков?

Ответ. Вероятность этого события равна $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

2. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один шар, отмечают его цвет и опускают обратно в урну.

Шары перемешивают и снова вынимают шар. Какова вероятность того, что:

а) оба вынутых шара — чёрные;

б) оба шара — белые;

в) один шар чёрный, другой — белый?

Указание. При извлечении первого шара и второго шара имеем два независимых события. Поэтому вероятность произведения указанных событий равна произведению их вероятностей.

3. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один за другим два шара, не опуская их обратно в урну. Какова вероятность того, что оба вынутые шара — чёрные?

Указание. В этом случае, в отличие от эксперимента из задачи 2, получаем два зависимых события. Если через A обозначим событие извлечения чёрного шара в первый раз, а через B — событие извлечения чёрного шара во второй раз, то $P(A)=\frac{1}{9}$, $P(B\,|\,A)=\frac{3}{8}$, поэтому $P(AB)=P(A)=P(B\,|\,A)=\frac{1}{6}$.

4. Два охотника увидели лису и одновременно выстрелили в неё. Предположим, что каждый из охотников на таком расстоянии обычно убивает лису в одном случае из трёх. Какова вероятность того, что оба охотника промахнутся и лиса уцелеет?

Указание. События попадания каждого из охотников в лису следует считать независимыми.

5. В артиллерийской батарее четыре орудия. Первое орудие пристреляно так, что вероятность попадания из него по цели равна 0,3; для каждого из остальных трёх орудий вероятность попадания равна 0,2. Батарея дала залп. Какова вероятность того, что:

а) все орудия попадут в цель;

б) ни одно из орудий не попадёт в цель;

в) одно лишь первое орудие попадёт в цель?

Указание. События попадания каждого из орудий в цель следует считать независимыми.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Какова вероятность угадать задуманное двузначное число с третьей попытки, если первые две попытки были неудачными?

1) $\frac{1}{98}$ 2) $\frac{1}{92}$ 3) $\frac{1}{88}$ 4) $\frac{1}{82}$

Указание. Задача сводится к нахождению вероятности выбора одного числа из 90 − 2 чисел, которые ещё не назывались.

2.1. Какие из равенств для вероятностей являются верными?

1) $P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ 2) $P(AB) = P(B) \cdot P(B \mid A)$

3) $P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B)$ 4) $P(AB) = P(A) \cdot P(A \mid B)$

Указание. В каждом из вариантов справа должно быть выражение, которое соответствует изучаемой в параграфе формуле вероятности произведения двух событий.

2.3.* Для событий A и B известно, что $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Какие значения не может иметь $P(AB)$?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{12}$

Указание. Во всех случаях выполняется неравенство $P(AB) \le P(B) = \frac{1}{4}$, при этом пересечение указанных событий может быть и пустым.

§ 3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Цель параграфа — ознакомиться с формулами теории вероятностей, с помощью которых можно решать многие задачи на вычисление вероятностей событий и условных вероятностей.

Особенности параграфа. При изучении формулы полной вероятности следует хорошо разобраться со смыслом полного класса событий и уяснить, что выделение полного класса событий эквивалентно разбиению всего множества исходов на попарно непересекающиеся подмножества. Дальнейшее изучение формулы полной вероятности и её применение к конкретным задачам не должно вызывать затруднений у тех, кто хорошо освоил понятие условной вероятности.

В конце параграфа в качестве важного следствия из формулы полной вероятности выводится формула Байеса, с помощью которой можно вычислять некоторые условные вероятности. Этот материал не простой, сам внешний вид формулы Байеса сложный, доказательство далеко не очевидно, поэтому формула Байеса и примеры на её применение рассчитаны на третий уровень.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: условная вероятность; формула вероятности произведения двух событий.

Новые математические понятия: полный класс событий; формула полной вероятности; формула Байеса.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Как доказать, что если все события $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ возможны, то они образуют полный класс, каковы бы ни были события A и B?

Ответ. Эти события попарно несовместны, а их объединение совпадает с множеством всех исходов эксперимента, потому что $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$, $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$, $A \cup \overline{A} = \Omega$.

3.2. Как объяснить, что вероятности $P(H_1)$, $P(H_2)$ и $P(H_3)$ в примере 3 равны $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$ соответственно?

Ответ. В примере предполагается, что с равной вероятностью можно выбрать каждую из пяти урн, из которой затем извлекается шар. Так как по составу шаров есть две урны первого вида, одна урна второго вида и две урны третьего вида, то и получим вероятности выбора урны заданного вида, которые выписаны соответственно в формулировке вопроса.

3.3.** Как в примере 4 найти $P(H_1 | A)$ и $P(H_2 | A)$?

Ответ. Аналогично приведённому в данном пункте, по формуле Байеса:

$$P(H_1 | A) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{1}{5},$$

$$P(H_2 | A) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4}{5}.$$

Указания к решению наиболее трудных задач

1. Имеется 5 урн, из которых две содержат по 2 белых и одному чёрному шару, одна урна — 10 чёрных шаров и ещё две урны — по 3 белых и одному чёрному шару. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается шар. Какова вероятность, что этот шар окажется: а) белым; б) чёрным?

Указание. Применить формулу полной вероятности. Если A — событие, состоящее в том, что извлекается белый шар, а B — событие, что извлекается чёрный шар, то $P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+$ $+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{17}{30}$, $P(B)=P(A)=1-P(A)$, $P(A)=\frac{13}{30}$.

2.** Имеется 5 урн с белыми и чёрными шарами, из которых три содержат по три белых и одному чёрному шару и две содержат по 4 белых и 2 чёрных шара. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается шар, который оказался белым. Какова вероятность, что этот шар вынут: а) из урны первого состава; б) из урны второго состава?

Указание. Пусть H_1, H_2 — события выбора урны соответствующего состава и A — событие извлечь белый шар. Тогда с помощью формулы полной вероятности получим:

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{43}{60}.$$

Далее по формуле Байеса находим ответы на вопросы задачи:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{43}{60}}=\frac{27}{43},$$

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{43}{60}}=\frac{16}{43}.$$

3. На заводе — три цеха. 50% продукции производит цех № 1, 30% — цех № 2 и 20% — цех № 3. При этом вероятность произвести бракованную продукцию равна 1% у цеха № 1, 2% — у цеха № 2 и 2% — у цеха № 3. Какова вероятность того, что завод выпустит бракованное изделие?

Указание. Пусть A — событие, состоящее в выборе бракованного изделия, H_1, H_2, H_3 — события, состоящие в выборе изделия, произведённого цехом № 1, цехом № 2 и цехом № 3 соответственно. Из условия $P(H_1)=0{,}5$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}2$, $P(A\,|\,H_1)=0{,}01$, $P(A\,|\,H_2)=P(A\,|\,H_3)=0{,}02$. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)\cdot P(H_1)+P(A\,|\,H_1)\cdot P(H_2)+P(A\,|\,H_3)\cdot P(H_3)=$$
$$=0{,}01\cdot 0{,}5+0{,}02\cdot 0{,}3+0{,}02\cdot 0{,}2=0{,}015.$$

4.* Урны занумерованы числами от 1 до m. Урна с номером i содержит N_i шаров, из которых n_i шаров белые. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается шар. Какова вероятность, что этот шар окажется белым?

Указание. Можно считать, что из $N_1 + N_2 + ... + N_m$ шаров, среди которых $n_1 + n_2 + ... + n_m$ белых, каждый шар извлекается с равной вероятностью. Поэтому $P = \dfrac{n_1 + n_2 + ... + n_m}{N_1 + N_2 + ... + N_m}$.

5.** В артиллерийской батарее четыре орудия. Первое орудие пристреляно так, что вероятность попадания из него по цели равна 0,3, для каждого из остальных трёх орудий она равна 0,2. Батарея дала залп, и было получено в точности одно попадание в цель. Какова вероятность того, что в цель попал снаряд: а) из первого орудия; б) из второго орудия?

Указание. а) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — события, состоящие в попадании в цель из первого, второго, третьего и четвёртого орудия соответственно. Из условия $P(A_1) = 0,3$, $P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 0,2$. Если при одновременном залпе из всех орудий единственное попадание было из первого орудия, то это означает, что произошло событие $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4$. С учётом независимости попаданий в цель из разных орудий получим:

$$P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4) = P(A_1) \cdot (1 - P(A_2) \cdot (1 - P(A_3) \cdot (1 - P(A_4) = 0,0081.$$

Аналогично можно получить ответ и в пункте б).

6. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один за другим 2 шара, причём шар, вынутый в первый раз, не кладут обратно в урну. Какова вероятность того, что оба шара белые?

Указание. $P(A) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{18}$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.4. Какова вероятность того, что при первом бросании монеты выпадет орёл, при втором — решка и при третьем — орёл?

1) $\dfrac{1}{12}$ 2) $\dfrac{1}{9}$ 3) $\dfrac{1}{8}$ 4) $\dfrac{1}{6}$

Указание. Ввиду того что приведённые три события независимы, их одновременное появление равно произведению вероятностей каждого из них.

2.1. Какие из равенств для вероятностей являются верными?

1) $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 2) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

3) $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \overline{A})$ 4) $P(A + B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(B)$

Указание. Вариант 1 не подходит, потому что соответствующее равенство может не выполняться в случае совместных событий; вариант 2 соответствует общей формуле вероятности суммы двух событий; в варианте 3 в правой части стоит сумма вероятностей несовместных событий, и аналогично в варианте 4.

2.2. Для событий A и B известно, что $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$. Какие значения не может иметь $P(A + B)$?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{7}{12}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{4}$

Указание. Вероятность суммы нескольких событий не может быть больше суммы вероятностей этих событий.

2.3. Для некоторых событий A и H известно, что $P(A \mid H) \leq 0{,}6$. Какие значения может иметь условная вероятность $P(\overline{A} \mid H)$?

Указание. $P(A \mid H) + P(\overline{A} \mid H) = 1$.

2.4. Эксперимент состоит в двукратном бросании игрального кубика. Вероятности каких из приведённых событий равны $\frac{1}{9}$?

1) произведение выпавших очков равно 6
2) произведение выпавших очков равно 12
3) произведение выпавших очков равно 4
4) произведение выпавших очков равно 8

Указание. Всего 36 возможных комбинаций очков при двукратном бросании игрального кубика. Далее в каждом из вариантов нужно посчитать количество благоприятных комбинаций.

Глава 11
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель главы — дать общее определение периодической функции и доказать периодичность основных тригонометрических функций; среди периодических функций выделить те, которые обладают наименьшим положительным периодом; установить необходимое и достаточное условие периодичности тригонометрического двучлена $a\cos kx + b\cos lx$.

Особенности главы. Определение периодической функции и изучение её свойств рассчитано на первый уровень. При этом особое внимание обращается на применение свойства периодичности функции к построению её графика. Исследование тригонометрических двучленов является непростой задачей и в полном объёме рассчитано на третий уровень. Основной результат полезно знать и на первом уровне, применяя его при решении задач.

§ 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель параграфа — определить периодические функции, ввести понятие основного периода, найти основные периоды для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

Особенности параграфа. Понятие периода естественным образом возникает тогда, когда изучаются тригонометрические функции направленных углов и тригонометрические функции числового аргумента. Новым в данном параграфе является общее определение периодической функции, свойства периодов и примеры, демонстрирующие, что периодические функции могут быть весьма необычными. В частности, среди периодических функций выделяются такие функции, которые не являются постоянными, а наименьшего положительного периода не имеют.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: определение тригонометрических функций числового аргумента; свойства тригонометрических функций; формулы преобразования тригонометрических функций.

Новые математические понятия и свойства: периодическая функция; период функции; основной период функции.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Как доказать, что основной период функции $f(x) = \sin x + \cos x$, определённой на всей числовой оси, равен 2π?

Ответ. Прежде всего, поскольку $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ при всех действительных значениях x, число 2π является периодом заданной функции. Далее, если предположить, что положительное число T является периодом данной функции, то $\sin(x + T) + \cos(x + T) = \sin x + \cos x$ при всех действительных значениях x. В частности, выполняются равенства $\sin T + \cos T = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 1$. Второе из равенств преобразуется к виду $\cos T - \sin T = 1$. В итоге приходим к равенству $\cos T = 1$, откуда $T = 2\pi k$, где $k \in Z$. Из этих чисел наименьшим положительным значением является $T = 2\pi$.

1.2. Какой основной период имеет функция $g(x) = \sin x + 1$?

Ответ. Равенство $g(x + T) = g(x)$ означает, что $\sin(x + T) + 1 = \sin x + 1$, откуда $\sin(x + T) = \sin x$ для всех x. Следовательно, функция $f(x) = \sin x + 1$ имеет те же периоды, что и функция $y = \sin x$. Поэтому основной период функции равен 2π.

1.3. Чему равен основной период функции $y = \mathrm{tg}^2 x$?

Ответ. Основной период равен π. Действительно, если $\mathrm{tg}^2(x + T) = \mathrm{tg}^2 x$ при всех x, то при $x = 0$ получим $\mathrm{tg}^2 T = 0$, то есть $\mathrm{tg} T = 0$. Наименьшее положительное число, для которого это равенство выполняется, равно π.

1.4. Почему начальную часть графика функции $y = \sqrt{\sin x}$ можно строить на полуинтервале $(0; 2\pi]$?

Ответ. Основной период данной функции равен 2π. Поэтому задание функции на любом полуинтервале длины 2π с одним из включённых концов позволяет параллельными переносами полученной части графика вдоль оси Ox на числа вида $2\pi k$, где $k \in Z$, получить весь график данной функции. Заданный в вопросе промежуток обладает указанными свойствами.

Указания к решению наиболее трудных задач

6.** Приведите пример таких функций $f(x)$ и $g(x)$, что каждая из них имеет основной период T, а сумма $f(x) + g(x)$ имеет меньший основной период.

Указание. В качестве примера можно рассмотреть функции $y = |\sin x|$ и $y = |\cos x|$, каждая из которых имеет основной период π. Сумма этих функций $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ имеет период $\frac{\pi}{2}$, поскольку при всех x выполняется равенство $\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\sin x| + |\cos x|$.

8.* Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ не является периодической.

Указание. Равенство $f(x + T) = f(x)$ означает, что $\sqrt{|x + T|} = \sqrt{|x|}$ для всех x. При $x = 0$ будем иметь $T = 0$. По определению число 0 не может быть периодом, поэтому $f(x)$ периода не имеет.

9.** Докажите, что определённая на всей числовой прямой функция $f(x) = x - [x]$, где $[x]$ — это целая часть числа x, является периодической.

Указание. Построив график функции $f(x) = x - [x]$, можно заметить, что она имеет основной период, равный 1. Доказательство равенства $f(x + 1) = f(x)$ при всех x следует из того, что дробные части чисел x и $x + 1$ равны.

10.* г) Найдите область определения и основной период функции $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

Указание. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$. Поэтому основной период равен π.

13.* Докажите, что число π не является периодом функции $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Указание. Область определения функции $y = \sin x + \operatorname{tg} x$ состоит из чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in Z)$. Допустим, что π — период этой функции. Тогда для всех x из области определения D должно выполняться равенство $\sin(x + \pi) + \operatorname{tg}(x + \pi) = \sin x + \operatorname{tg} x$. Однако $\frac{\pi}{4} \in D$, но $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$, $\sin\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

17.* Постройте график функции $y = \operatorname{tg}|x|$. Будет ли эта функция периодической?

Указание. Функция $y = \operatorname{tg}|x|$ имеет единственный локальный минимум в точке с абсциссой $x = 0$. Однако у периодической функции локальные минимумы должны периодически повторяться. Поэтому функция $y = \operatorname{tg}|x|$ не будет периодической.

19. Изобразите график функции: г)** $y = \sqrt{2\sin x - 1}$; е)** $y = \sin\frac{1}{x}$.

Указание. г)** Функция определена на множестве D тех значений x, для которых $\sin x \geq \frac{1}{2}$. Число 2π является периодом этой функции. Поэтому достаточно построить график на отрезке $[0; 2\pi]$. Сначала изобразите график функции $y = 2\sin x - 1$ на этом отрезке, а затем отметьте ту часть отрезка $[0; 2\pi]$, которая принадлежит области D. е) ** Функция определена для всех значений $x \neq 0$. Поскольку $\sin\left(\frac{1}{-x}\right) = -\sin\frac{1}{x}$, график симметричен относительно начала координат. График пересекает ось Ox в точках $x_k = \frac{1}{\pi k}$ $(k \in Z)$. Среди них положительными будут точки $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}$ и т.д, и в них функция принимает значение 0. Далее на каждом из получающихся промежутков положительной части оси абсцисс определить знак функции, начав с того, что при $x > \frac{1}{\pi}$ значения функции $\sin\frac{1}{x}$ положительны.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Чему равен основной период функции $f(x) = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$?

1) 6π 2) 3π 3) $\frac{2}{3}\pi$ 4) $\frac{1}{3}\pi$

Указание. Представить график функции, сначала найдя нули этой функции.

1.4. График какой из приведённых функций симметричен относительно оси ординат?

1) $y = \sin x + \cos x$ 2) $y = \sin x \cdot \sin 3x$
3) $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$ 4) $y = 1 + \sin x$

Указание. Симметричность графика функции относительно оси ординат эквивалентна чётности этой функции.

2.4. Какие из функций имеют период $T = -\frac{\pi}{2}$?

1) $y = \mathrm{tg}\,2x$ 2) $y = \mathrm{ctg}\,3x$ 3) $y = \mathrm{tg}\,4x$ 4) $y = \mathrm{ctg}\,6x$

Указание. Сначала можно найти основной период каждой функции.

§ 2. ФУНКЦИИ С ОСНОВНЫМ ПЕРИОДОМ

Цель параграфа — рассмотреть, как находить основной период функции $h(x) = f(kx + a)$, если функция $f(x)$ имеет основной период T; найти основной период тригонометрического двучлена $a\sin kx + b\cos kx$; показать, что сумма и произведение двух периодических функций, обладающих соизмеримыми периодами $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$, являются периодическими функциями; установить необходимое и достаточное условие периодичности тригонометрического двучлена $a\cos kx + b\sin lx$ общего вида.

Особенности параграфа. Ввиду того что доказательства свойств, относящихся к периодичности функций, как правило, являются непростыми, на первом уровне основное внимание следует сосредоточить на формулировках изучаемых свойств и их применении в стандартных ситуациях. На третьем уровне рассматриваются тригонометрические двучлены общего вида и устанавливаются условия их периодичности.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: свойства тригонометрических функций; формулы преобразования тригонометрических функций.

Новые математические понятия и свойства: тригонометрический двучлен $a\sin kx + b\cos kx$; тригонометрический двучлен $a\cos kx + b\sin lx$ общего вида.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Каковы все периоды функции $y = \sin 2x$?

Ответ. Если T — период функции $y = \sin 2x$, то $\sin 2(x + T)) = \sin 2x$ при всех x из $D(y)$, откуда $\sin(2x + 2T) = \sin 2x$. Следовательно, $2T$ — период функции $y = \sin x$. В результате приходим к равенствам $2T = 2k\pi$ и $T = k\pi$, где $k \in Z$.

2.2.** Какие периоды имеет функция $y = \operatorname{tg} \pi x$?

Ответ. Если T — период функции $y = \operatorname{tg} \pi x$, то $\operatorname{tg}(\pi(x + T)) = \operatorname{tg} \pi x$ при всех x из области определения, откуда $\operatorname{tg}(\pi x + \pi T) = \operatorname{tg} \pi x$. Следовательно, πT — период функции $y = \operatorname{tg} x$. В результате приходим к равенствам $\pi T = k\pi$ и $T = k$, где $k \in Z$. Основной период данной функции равен 1, так как это наименьшее положительное число из найденных периодов.

2.3.** Какой основной период имеет функция $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$?

Ответ. Как следует из утверждения, сформулированного в п. 2.3.**, основной период функции $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$ равен $\pi : \left(\pi : \frac{1}{3}\right) = 3\pi$.

2.4.** Как доказать, что периодом функции $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \sin\frac{2}{3}x + \sin\left(\frac{2}{5}x - 1\right)$ является общий период всех трёх слагаемых?

Ответ. Если T — общий период слагаемых, то $\sin\left(\frac{1}{2}(x+T)+1\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$, $\sin\frac{2}{3}(x + T) = \sin\frac{2}{3}x$ и $\sin\left(\frac{2}{5}(x + T) - 1\right) = \sin\left(\frac{2}{5}x - 1\right)$ для всех x. Из полученных равенств следует, что при всех x выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

2.5. Чему равен основной период функции $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$?

Ответ. Выражение, которым определяется данная функция, является тригонометрическим двучленом и преобразуется к виду $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)$. Отсюда следует, что основной период данной функции равен π.

2.6.** Чему равен основной период функции $f(x) = 3\sin\frac{\pi}{2}x - 4\cos\frac{\pi}{2}x$?

Ответ. Выражение, которым определяется данная функция, является тригонометрическим двучленом и преобразуется к виду $3\sin\frac{\pi}{2}x - 4\cos\frac{\pi}{2} = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \varphi\right)$, где $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$. Отсюда следует, что основной период данной функции равен 4.

2.7. Являются ли периодическими функции $y_1 = 2\sin 3x + 4\sin 5x$ и $y_2 = 2(\sin 3x) \cdot 4(\sin 5x)$?

Ответ. Являются. Это сразу следует из утверждения, сформулированного в данном пункте.

2.8.** Соизмеримы ли основные периоды функций $f_1(x) = \sin\left(\frac{3}{5}x + 2\right)$ и $f_2(x) = \cos\left(\frac{4}{7}x + 3\right)$?

Ответ. Основные периоды $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{2}$ соизмеримы, поскольку их отношение рационально.

2.9.** Будет ли периодической функция $y = \sin\left(\sqrt{2}x\right) + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$?

Ответ. Первый способ. Основные периоды слагаемых равны $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$. Их отношение равно 1 и рационально. Поэтому на основании утверждения из п. 2.7 можно сделать вывод, что данная функция является периодической.

Второй способ. Выражение, определяющее данную функцию, является тригонометрическим двучленом, а поэтому имеет период.

2.10.** При каком отношении $\frac{s}{t}$ функция $y = \sin(s + t)x + \cos(s - t)x$, где $s + t \neq 0$, $s - t \neq 0$, $t \neq 0$ является периодической?

Ответ. Данная функция является периодической тогда и только тогда, когда отношение $\frac{s+t}{s-t}$ рационально. Но это отношение можно выразить через отношение $\frac{s}{t}$ в виде $\frac{s+t}{s-t} = \frac{\frac{s}{t}+1}{\frac{s}{t}-1}$. Следовательно, если отношение $\frac{s}{t}$ рационально, то отношение $\frac{s+t}{s-t}$ тоже рационально. Обратно, если отношение $r = \frac{s+t}{s-t}$ рационально, то отношение $\frac{s}{t} = \frac{r+1}{r-1}$ тоже рационально. Таким образом, данная функция является периодической тогда и только тогда, когда отношение $\frac{s}{t}$ рационально.

Указания к решению наиболее трудных задач

7.** Найдите наибольшее значение функции $y = \sin x + \cos x - \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Указание. Заметим, что $f(x) = \sin x + \cos x - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 2\sin x$, поэтому наибольшее значение функции равно 2.

9.** Для каких целых чисел n функция $y = \sin x + \cos(\sqrt{n} \cdot x)$ является периодической?

Указание. Воспользоваться теоремой о тригонометрическом двучлене общего вида из п. 4.3. Необходимым и достаточным условием периодичности данной функции является рациональность числа $\sqrt{n}$. Остаётся исследовать, для каких натуральных n число $\sqrt{n}$ является рациональным, то есть представимо в виде несократимой дроби $\frac{m_0}{n_0}$. Оказывается, что это может быть только в том случае, когда $\sqrt{n}$ является натуральным числом, то есть $n = k^2$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

11.** Найдите все точки отрезка $[0; \pi]$, в которых значения функции $y = \sin 3x - \cos 5x$ равны нулю.

Указание. Задача сводится к решению уравнения $\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$. Преобразуя левую часть по известной формуле разности синусов, получим два уравнения: $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ и $\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Остаётся из их корней выбрать числа, заключённые между числами 0 и π. Это будут числа $\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}$.

12.** Какое наибольшее число раз график функции $y = 3\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}$ может пересекать ось Ox на отрезке длины 4π?

Указание. По формуле для тригонометрического двучлена получим $3\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} = 5\sin\left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. Так как тригонометрический двучлен $3\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}$ обладает основным периодом, равным 4π, то достаточно найти число нулей функции $\sin\left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$ на отрезке, имеющем длину, равную основному периоду. Число таких нулей равно 3.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.* Какой основной период имеет функция $f(x) = \sin 2x + \sin 3x$?

1) π 2) 2π 3) 3π 4) 4π

Указание. Выбрать наименьшее положительное число из множеств $\{\pi k, k \in Z\}$, $\left\{\frac{2\pi m}{3}, m \in Z\right\}$.

2.3. Какие из указанных функций являются периодическими?

1) $f(x) = |\sin x|$ 2) $f(x) = \sin |x|$
3) $f(x) = |\sin x + 1|$ 4) $f(x) = \sin |x + 1|$

Указание. Представить графики заданных функций.

2.4.* Какие из указанных чисел являются периодом функции $f(x) = \cos x + \cos\frac{3}{4}x$?

1) 4π 2) 8π 3) 12π 4) 16π

Указание. Сначала найти основной период данной функции, выбрав наименьшее положительное число из множеств $\{2\pi k, k \in Z\}$, $\left\{\frac{8\pi m}{3}, m \in Z\right\}$.

Глава 12
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Цель главы — рассмотреть изображение комплексных чисел с помощью векторов, определить аргумент комплексного числа и тригонометрическую форму записи ненулевого комплексного числа; установить правила умножения и деления комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме; вывести формулу для вычисления корней n-й степени из комплексного числа. В качестве приложений рассмотреть линейные функции комплексного переменного, их связь с геометрическими преобразованиями плоскости, ознакомиться со знаменитой формулой Эйлера для комплексных показателей и некоторыми её применениями.

Особенности главы. Представление комплексных чисел с помощью векторов позволяет придать наглядность арифметическим операциям над комплексными числами. В частности, операцию сложения удаётся представить с помощью правила параллелограмма или правила треугольника. Для того чтобы придать операциям умножения и деления наглядно воспринимаемый смысл, вводится представление комплексных чисел в нормальной тригонометрической форме. В качестве одного из приложений рассматривается понятие комплексного корня из комплексного числа и выводится соответствующая формула всех комплексных корней из ненулевого числа. Другим приложением тригонометрической формы записи комплексных чисел является изучение линейных функций комплексного переменного и устанавливается их связь с некоторыми преобразованиями плоскости. В конце главы в порядке ознакомления приводится формула Эйлера, с помощью которой определяются некоторые степени с комплексными показателями.

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Цель параграфа — рассмотреть изображение комплексных чисел с помощью векторов, вспомнить понятие модуля комплексного числа, определить аргумент ненулевого комплексного числа и ввести нормальную тригонометрическую форму ненулевого числа.

Особенности параграфа. Понятие модуля комплексного числа изучалось в 10 классе. Геометрический смысл и правило вычисления модуля сравнительно простые и воспринимаются учащимися довольно легко. В отличие от этого понятие аргумента комплексного числа сложное, и требуется приложить заметные усилия, чтобы учащиеся от зрительного представления аргумента комплексного числа умели переходить к точной записи значений аргумента с помощью обратных тригонометрических функций. Более того, в силу объективных причин, связанных с правилами умножения и деления комплексных чисел, ненулевому комплексному числу приходится сопоставлять некоторое множество значений аргумента, и при изучении данного материала учащиеся для каждого ненулевого числа обязаны находить по нескольку значений аргумента. На первом уровне основное внимание следует сосредоточить на записи в тригонометрической форме конкретных комплексных чисел. Формальные правила перехода от алгебраической к тригонометрической форме записи комплексного числа непростые и рассматриваются на третьем уровне.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: понятие комплексного числа; арифметические операции над комплексными числами; изображение комплексных чисел точками координатной плоскости; модуль комплексного числа.

Новые математические понятия и свойства: аргумент комплексного числа; нормальная тригонометрическая форма записи ненулевого комплексного числа.

Вспомогательные математические понятия и свойства: тригонометрическая форма записи комплексно-сопряжённых чисел.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

1.1. Какими точками изображаются комплексные числа, модуль которых равен 1?

Ответ. Точками окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

1.2. Какой аргумент имеет комплексное число -5?

Ответ. Любой угол вида $\pi + 2\pi k$, где $k \in Z$. Например, аргументом этого числа можно считать угол величиной π.

1.3. Как записать в тригонометрической форме число $2i$?

Ответ. $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

1.4.** Как доказать правило для вычисления аргумента φ комплексного числа $z \neq 0$?

Ответ. Если $z = a + bi$, где a, b — действительные числа, причём a или b отлично от 0, то возможны лишь 4 случая, указанные в данном пункте, а именно:

1) $a = 0$ и $b > 0$. В этом случае точка $(0; b)$, изображающая число z, лежит на оси Oy выше начала координат, и поэтому аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

2) $a = 0$ и $b < 0$. Снова точка $(0; b)$, изображающая число z, лежит на оси Oy, но ниже начала координат. Направленный угол φ между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, где M — точка $(0; b)$, равен $\frac{3\pi}{2}$;

3) $a > 0$. В этом случае вектор $\overrightarrow{OM}$, изображающий число z, лежит в правой полуплоскости от оси Oy и составляет с осью Ox угол φ , заключённый в пределах $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ либо в пределах $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$. Таким образом, в обоих случаях $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$;

4) $a < 0$ и вектор $\overrightarrow{OM}$, изображающий число z, лежит в левой полуплоскости от оси Oy. Угол φ между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ можно записать в виде $\varphi = \pi + \alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

1.5. Почему модуль комплексного числа z совпадает с модулем комплексно-сопряжённого числа $\overline{z}$?

Вариант ответа. Изображения этих чисел симметричны относительно действительной оси, а поэтому находятся на равном расстоянии от числа 0.

Указания к решению наиболее трудных задач

5. д)** Вычислите модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{2} + i$?

Указание. Модуль данного числа равен $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Для вычисления аргумента запишем равенство $1 + \sqrt{2} + i = (1 + i) + \sqrt{2}$. Каждое слагаемое изобразим вектором. Так как $|1 + i| = \sqrt{2}$, сумма изобразится вектором с началом в точке (0; 0), совпадающим с диагональю ромба с вершинами в точках (1; 1), (0; 0), $(\sqrt{2}; 0)$, $(1+\sqrt{2}; 1)$ координатной плоскости. Аргумент числа $1+i$ равен $\frac{\pi}{4}$, поэтому диагональ ромба, которая делит этот угол пополам, образует с осью Ox угол $\frac{\pi}{8}$. Следовательно, аргумент числа $(1+\sqrt{2})+i$ равен $\frac{\pi}{8}$.

6. е)* Запишите в тригонометрической форме комплексное число $z=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$.

Указание. Данное число является противоположным к числу $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ и в тригонометрической форме запишется в виде $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$.

9.** Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием: а) $|z-2|=|z+4i|$; б) аргумент z равен 60°; в) $z\cdot\bar{z}=iz-i\bar{z}$?

Указание. а) Данное множество состоит из всех точек комплексной плоскости, равноудалённых от точек 2 и 4; б) из определения аргумента следует, что все комплексные числа с аргументом 60° расположены на одном луче с началом в точке 0; в) соотношение $z\cdot\bar{z}=iz-i\bar{z}$ преобразуется к виду $(z-i)(\bar{z}-\bar{i})=1$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

2.2. Какие из уравнений задают прямую?

1) $|z+1|=z-i$ 2) $|z-2i|=|z+2i|$

3) $|2z+i|=|z-1|$ 4) $|2z+1|=|2z-i|$

Указание. Число z можно представить в виде $z=a+bi$, а затем равенство квадратов модулей представить через переменные a и b.

2.3. Как может изображаться в комплексной плоскости множество всех чисел z, таких, что $|z-m|=|z-n|$, где $m\in C$ и $n\in C$?

1) точками, лежащими на оси Ox

2) точками, лежащими на прямой

3) точками, лежащими на луче

4) точками, лежащими на окружности

Указание. Множеством корней данного уравнения является либо вся комплексная плоскость (при $m=n$), либо прямая.

§ 2. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Цель параграфа — рассмотреть умножение и деление ненулевых комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме; изучить формулу Муавра.

Особенности параграфа. Основные результаты, приводящие к правилам умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, выводятся из определения умножения комплексных чисел с последующим применением формул тригонометрии. Для упрощения восприятия этих правил приводятся также их словесные формулировки. В качестве обобщения рассматривается формула Муавра для возведения комплексного числа в натуральную степень.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: модуль и аргумент комплексного числа; тригонометрическая форма записи комплексного числа; тригонометрические формулы суммы и разности аргументов.

Новые математические понятия и свойства: правила умножения и деления ненулевых комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме; формула Муавра.

Вспомогательные математические понятия и свойства: тригонометрические формулы кратного аргумента.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

2.1. Как находить модуль и аргумент произведения трёх комплексных чисел?

Ответ. Модуль произведения равен произведению модулей всех сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов всех сомножителей.

2.2. Чему равен модуль и аргумент частного $\dfrac{-1+i}{1+i}$?

Ответ. Представляя числитель и знаменатель в тригонометрической форме, получим $-1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, по правилу деления $\dfrac{-1+i}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=i$.

2.3. Чему равно $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^8$?

Ответ. Представляя в тригонометрической форме стоящее в скобках выражение, получим $-1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Поэтому $(-1 + i\sqrt{3})^8 = 2^8 \cdot \left(\cos\frac{16\pi}{3} + i\sin\frac{16\pi}{3}\right) = 2^8 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$ $= 128 \cdot \left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

2.4.* Как доказать, что для любого целого числа n и любого действительного числа φ выполняется равенство $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n =$ $= \cos n\varphi - i\sin n\varphi$?

Ответ. $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))^n = \cos n(-\varphi) +$ $+ i\sin n(-\varphi) = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$.

Указания к решению наиболее трудных задач

5.* Пусть $\varphi \in R$. Представьте в тригонометрической форме число:

а) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; б) $(-\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$; в) $-\sin\varphi - i\cos\varphi$;

г) $\frac{1}{\sin\varphi - i\cos\varphi}$; д) $1 + i \cdot \mathrm{tg}\varphi$.

Указание. а) $\sin\varphi + i\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$;

б) $-\cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)$;

в) $-\sin\varphi - i\cos\varphi = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$;

г) $\sin\varphi - i\cos\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$;

д) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi = 1 + i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Поскольку значение $\cos\varphi$ может быть и отрицательным, то последнее выражение не будет тригонометрической формой числа при $\cos\varphi < 0$. Тригонометрическая форма будет иметь следующий вид:

$$1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi = \begin{cases} \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \cos\varphi > 0, \\ \frac{1}{|\cos\varphi|}(\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)),\ \cos\varphi < 0. \end{cases}$$

6.** Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Запишите в тригонометрической форме число:

а) $1 + z$; б) $z^2 + z^3$; в) $z + \frac{1}{z}$;

г) $1 + z + z^2$; д) $z - z^3$; е) $\frac{1}{z^2 - 1}$.

Указание. а) $1 + z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$. При $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$ число представлено в тригонометрической форме; при $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ число равно нулю; при $\cos\frac{\varphi}{2} < 0$ имеем $1 + z = \left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = (-2)\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(-\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$.

б) $z^2 + z^3 = (\cos2\varphi + \cos3\varphi) + i(\sin2\varphi + \sin3\varphi) = 2\cos\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{5\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\frac{5\varphi}{2} + i\sin\frac{5\varphi}{2}\right)$. При $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$ число представлено в тригонометрической форме; при $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ число равно нулю; при $\cos\frac{\varphi}{2} < 0$ имеем $z^2 + z = \left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$.

в) $z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2\cos\varphi$; если $\cos\varphi > 0$, то аргумент равен 0; при $\cos\varphi = 0$ аргумент неопределён; если $\cos\varphi < 0$, то аргумент равен π.

г) $1 + z + z^2 = (1 + \cos\varphi + \cos2\varphi) + i(\sin\varphi + \sin2\varphi) = \cos\varphi + 2\cos^2\varphi + i(\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi) = (1 + 2\cos\varphi)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

д) $z - z^3 = \cos\varphi - \cos3\varphi + i(\sin\varphi - \sin3\varphi) = 2\sin\varphi\sin2\varphi - 2i\sin\varphi\cos2\varphi = 2\sin\varphi\cdot(\sin3\varphi - i\cos2\varphi) = 2\sin\varphi\cdot\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. При $\sin\varphi > 0$ число представлено в тригонометрической форме; при $\sin\varphi = 0$ число равно нулю; при $\sin\varphi < 0$ имеем $1 + z + z^2 = (-\sin\varphi)\cdot\left(\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\varphi\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

е) $z^2 - 1 = (\cos2\varphi - 1) + i\sin2\varphi = -2\sin^2\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi = 2\sin\varphi\cdot(-\sin\varphi + i\cos\varphi) = 2\sin\varphi\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + i\sin\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right)$. Далее, при $\sin\varphi = 0$ число $\frac{1}{z^2 - 1}$ не определено; если $\sin\varphi > 0$, то $\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2\sin\varphi}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\varphi\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)$; если $\sin\varphi < 0$, то $\frac{1}{z^2 - 1} = \left(-\frac{1}{2\sin\varphi}\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)$.

7.** Докажите, что если $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника.

Указание. Пусть числа z_1, z_2, z_3 изображены векторами. Поскольку $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, то вектор z_3 противоположен вектору $z_1 + z_2$. Таким образом, вектор $z_1 + z_2$ имеет длину 1 и является диагональю ромба, построенного на векторах z_1 и z_2. Пусть φ — угол между стороной и диагональю этого ромба. Тогда $1 \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}$. Отсюда $\varphi = 60°$, а угол между векторами z_1 и z_2 равен 120°. Все три вектора равноправны. Поэтому каждые два из них составляют угол в 120°. Концы векторов z_1, z_2, z_3 лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Следовательно, точки z_1, z_2, z_3 лежат в вершинах равностороннего треугольника.

8.** При $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ вычислите сумму $S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{19}$.

Указание. Поскольку $a = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, то $S = \frac{a^{20}-1}{a-1} = \frac{\cos\pi + i\sin\pi - 1}{a-1} = \frac{-2}{a-1} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)-i}$.

9.** Вычислите сумму $a + a^2 + \ldots + a^{1000}$ при $a = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$.

Указание. Поскольку $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, то $a^{999} = 1$, $a^{1000} = a^{999} \cdot a = a$, и $a + a^2 + \ldots + a^{1000} = a(1 + a + \ldots + a^{999}) = a\frac{a^{1000}-1}{a-1} = a$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Чему равняется $\left(3 + \sqrt{3}i\right)^3$?

1) $-24\sqrt{3}$ 2) $24\sqrt{3}\,i$ 3) 12 4) $-12i$

Указание. $3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

1.4. Какова запись числа $\frac{i-1}{2+2i}$ в нормальной тригонометрической форме?

1) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ 2) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

3) $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Указание. Заданное число равно $\dfrac{i}{2}$.

2.2. Для каких из указанных чисел выполняется равенство $z^3 = -i$?

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2}$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}i - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Указание. Каждое из приведённых чисел представить в тригонометрической форме.

2.3. Каким из указанных выражений равно частное $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}}$?

1) $\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}$ 2) $\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$

3) $\cos\dfrac{17\pi}{12} - i\sin\dfrac{17\pi}{12}$ 4) $\cos\dfrac{13\pi}{12} - i\sin\dfrac{13\pi}{12}$

Указание. Числитель и знаменатель умножить на число, сопряжённое знаменателю.

§ 3. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Цель параграфа — определить понятие корня n-й степени из комплексного числа при натуральном n, рассмотреть способ нахождения всех значений корня, вывести общую формулу корней, рассмотреть свойства комплексных корней из 1.

Особенности параграфа. Основой для изучения данного параграфа являются представление ненулевых комплексных чисел в тригонометрической форме и формула Муавра. Ввиду того что вывод общей формулы для корней довольно сложен, на первом уровне достаточно ограничиться примерами нахождения всех значений корня. При этом на примере корней второй и третьей степени следует продемонстрировать, что даже при нахождении всех комплексных значений корня n-й степени из числа 1 получается n различных значений. Далее, следует обратить внимание также на тот факт, что в комплексной плоскости множество всех комплексных корней из фиксированного числа изображается вершинами правильного многоугольника.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: арифметические операции над комплексными числами при их записи в алгебраической и тригонометрической форме; теорема Муавра.

Новые математические понятия и свойства: комплексный корень n-й степени из комплексного числа ($n \in N$); формула комплексных корней; комплексные корни из 1.

Вспомогательные математические понятия и свойства: представление комплексных корней из комплексного числа с помощью корней из 1.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

3.1. Из каких комплексных чисел состоит множество $\sqrt[4]{i}$?

Ответ. Из чисел вида $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}k\right)$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

3.2.** Сколько различных комплексных корней имеет уравнение $x^5 + 1 = 0$?

Ответ. Пять корней $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k\right)$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.3. Какие корни имеет уравнение $x^6 - x = 0$?

Ответ. Всего шесть корней. Пять корней $z_k = \cos\frac{2\pi}{5}k + \sin\frac{2\pi}{5}k$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4$, и ещё один корень $z_6 = 0$.

3.4. Пусть ε — значение корня пятой степени из 1. Чему равно число $(\varepsilon_1)^{-8}$?

Ответ. По условию $\varepsilon^5 = 1$. Отсюда следует, что $\varepsilon^{10} = (\varepsilon^5)^2 = 1$, $\varepsilon^{-8} = \varepsilon^{2-10} = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon^{-10} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{10}} = \varepsilon^2$.

3.5. Чему равно произведение всех корней n-й степени из единицы?

Ответ. Если $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, то произведение всех корней n-й степени из 1 равно $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_1^n = \varepsilon_1^{1+2+\ldots n} = \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}} = \cos\pi(n + 1) + i\sin(n + 1)$, что равно 1 при каждом натуральном n.

3.6.** Сколько различных комплексных корней имеет уравнение $z^5 = (\bar{z})^6$?

Ответ. Заметим, что $z = 0$ является корнем данного уравнения. При $z \neq 0$ уравнение можно преобразовать к виду

$z^8 = z^3 \cdot (\bar{z})^3$ или $z^8 = (z \cdot \bar{z})^3 = |z|^6$. Положим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$. Тогда $z^8 = r^8(\cos 8\varphi + i\sin 8\varphi) = r^6$. Отсюда $r = 1$, а $(\cos 8\varphi + i\sin 8\varphi) = 1$. Последнее соотношение приводит ещё к восьми корням, и всего получим 9 корней.

3.7.** Чему равно произведение $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{8\pi}{7}$?

Ответ. Первый способ. В пункте показано, что если $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$, то $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$, $\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right)$, $\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^3 + \frac{1}{\varepsilon_1^3}\right)$, а также что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$. Вычисляя произведение, получим

$$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2^3}\left(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^3 + \varepsilon_1^5 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1^3} + \frac{1}{\varepsilon_1^5}\right).$$

Поскольку $\varepsilon_1^5 \cdot \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^7 = 1$, то $\varepsilon_1^5 = \frac{1}{\varepsilon_1^2}$. Отсюда

$$\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2^3}\left(2 + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right) + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1^3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(2 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}.$$

Второй способ. Заметим, что $\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7}$, и рассмотрим выражение $8\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7}$. Используя формулы двойного угла, получим

$$8\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = 4\sin\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{8\pi}{7} =$$

$$= 2\sin\frac{8\pi}{7} \cdot \cos\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{16\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7},$$

откуда $\cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \cdot \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

3.** К точке приложено 20 сил, причём угол между двумя последовательными силами равен 45°, а модули сил составляют геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1, а знаменатель $\sqrt{2}$. Найдите величину и направление равнодействующей силы.

Указание. Пусть направление первой силы совпадает с направлением оси Ox. Тогда силы изображаются такими же векторами, как и комплексные числа: 1, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $(\sqrt{2})^2\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)$, ..., $(\sqrt{2})^{19}\left(\cos\frac{19\pi}{4} + i\sin\frac{19\pi}{4}\right)$.

Пусть $F = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда равнодействующая сила равна $1 + F + F^2 + \ldots + F^{19} = \frac{F^{20} - 1}{F - 1}$. Так как $F = 1 + i$, то $F^{20} = 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = -2^{10}$, и $1 + F + F^2 + \ldots + F^{19} = \frac{-1025}{i} = 1025i$.

6.** Докажите, что уравнение $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Указание. Так как $x^6 + x^5 + \ldots + x + 1 = \frac{x^7 - 1}{x - 1}$, то все корни данного уравнения являются корнями седьмой степени из 1, отличными от 1. Они изображаются вершинами правильного семиугольника, из которых только одна лежит на оси Ox и имеет координаты (1; 0). Таким образом, все вершины, отличные от (1; 0), лежат вне оси Ox. Поэтому уравнение $x^6 + x^5 + \ldots + x + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

7.** Найдите такое наименьшее натуральное число n, для которого $(1 + i)^n = (1 - i)^n$.

Указание. Записывая числа $1 + i$ и $1 - i$ в тригонометрической форме, получим $\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}$, откуда $\sin\frac{n\pi}{4} = 0$. Следовательно, выбирать значения n следует из чисел, кратных четырём.

8.** Найдите все комплексные корни уравнения:

а) $z^2 + \bar{z} = 0$; б) $z^3 + |z| = 0$; в) $z^5 = \bar{z}$.

Указание. а) Из условия $z^2 = -\bar{z}$ следует, что $|z|^2 = |\bar{z}| = |z|$, откуда либо $|z| = 0$, либо $|z| = 1$. При $|z| = 0$ получим $z = 0$, а при $|z| = 1$ уравнение приводится к виду $z^3 = -1$; б) число 0 является корнем заданного уравнения; если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$, то либо $\cos 3\varphi = 1$, $r^3 + r = 0$, либо $\cos 3\varphi = -1$, $r^3 - r = 0$; в) заданное уравнение равносильно уравнению $z^6 = z \cdot \bar{z}$.

9.** Сколько корней в множестве комплексных чисел имеет уравнение:

а) $z^{100} = (\bar{z})^{99}$; б) $z^{100} = (\bar{z})^{100}$?

Указание. а) Умножив обе части равенства на z^{99}, получим $z^{199} = |z^{198}|$. Прежде всего, число 0 является корнем этого уравнения. Если $z \neq 0$, то запишем его в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, подставим в уравнение и после упрощений получим: $r(\cos 199\varphi + i\sin 199\varphi) = 1$, откуда $r = 1$, $\varphi = \frac{2k\pi}{199}$, где $k \in Z$. Следовательно, уравнение имеет 200 корней: $z_0 = 0$, $z_k = \cos\frac{2(k-1)\pi}{199} + i\sin\frac{2(k-1)\pi}{199}$, где $k = 1, 2, \ldots, 199$. б) Умножив обе части равенства на z^{100}, получим $z^{200} = |z|^{200}$. Прежде всего, число 0 является корнем этого уравнения. Если $z \neq 0$, то запишем его в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, подставим в уравнение и после упрощений получим $\cos 200\varphi + i\sin 200\varphi = 1$, откуда $\varphi = \frac{k\pi}{100}$, где $k \in Z$. В итоге приходим к тому, что данное уравнение имеет бесконечное множество корней: $z_0 = 0$, $z_{r,k} = r\left(\cos\frac{k\pi}{100} + i\sin\frac{k\pi}{100}\right)$, где $r > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 199$.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2. Какой вид имеют корни третьей степени из $\sqrt{3}i + 1$?

1) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, где $k = 0, 1, 2$

2) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)$, где $k = 0, 1, 2$

3) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)$, где $k = 0, 1, 2$

4) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, где $k = 0, 1, 2$

Указание. Поскольку $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то первые два варианта можно сразу исключить.

1.4.* Пусть $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi k}{12}$ — k-й корень 12-й степени из единицы. Чему равно произведение $(z - \varepsilon_3)(z - \varepsilon_6)(z - \varepsilon_9)$?

1) $z^3 + z^2 + z + 1$ 2) $z^3 - z^2 + z - 1$

3) $z^3 - \varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_9$ 4) $(z^3 - \varepsilon_6)^3$

Указание. Числа $\varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9$ являются значениями корня 4-й степени из 1, которые не равны 1.

2.1. Корни чётной степени из действительного числа изображаются на координатной плоскости. Какие особенности имеет это множество?

1) симметрично относительно начала системы координат

2) симметрично относительно оси Ox

3) симметрично относительно оси Oy

4) симметрично относительно прямой, проходящей через начало системы координат и точку, изображающую любой из корней

Указание. Прежде всего, все корни изображаются вершинами многоугольника с чётным числом вершин. Далее, всегда существуют два корня, симметричные относительно оси Ox.

2.4.* Пусть $\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. При возведении каких из указанных чисел t в натуральные степени можно получить все корни 8-й степени из 1?

1) $t = \varepsilon_0^2$ 2) $t = \varepsilon_0^3$ 3) $t = \varepsilon_0^4$ 4) $t = \varepsilon_0^5$

Указание. Число $\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ является таким корнем 8-й степени из 1, при возведении которого в натуральные степени получаются все значения корня 8-й степени из 1. Поэтому при возведении числа вида ε_0^p в натуральные степени все корни 8-й степени получаются только тогда, когда число p взаимно просто с числом 8.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Цель параграфа — рассмотреть линейные функции комплексного переменного и их применение к изучению некоторых преобразований плоскости.

Особенности параграфа. Параграф посвящён приложениям комплексных чисел к изучению геометрии плоскости.

Сначала на основе геометрического смысла сложения комплексных чисел устанавливается, что функции вида $f(z) = z + a$, где a — фиксированное комплексное число, соответствуют на плоскости параллельным переносам. Затем с помощью представления комплексных чисел в тригонометрической форме устанавливается, что функции вида $f(z) = az$, где a — фиксированное отличное от 1 комплексное число, модуль которого равен 1, соответствуют на плоскости поворотам вокруг точки 0. Затем выделяется весь класс линейных функций комплексного переменного, которые соответствуют поворотам. Дополнительно на первом уровне рассматривается функция $f(z) = \bar{z}$, которая соответствует симметрии относительно действительной оси, а на третьем уровне — функции комплексного переменного, которые соответствуют гомотетии.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: геометрический смысл операции сложения комплексных чисел; тригонометрическая форма записи ненулевого комплексного числа; правила умножения и деления комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме.

Новые математические понятия и свойства: функция комплексного переменного; линейная функция комплексного переменного; задание параллельных переносов и поворотов с помощью функций комплексного переменного.

Вспомогательные математические понятия и свойства: задание гомотетии с помощью функции комплексного переменного.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

4.1. Какова область значений функции, заданной формулой функция $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$?

Ответ. Всё множество комплексных чисел, потому что для каждого комплексного числа a уравнение $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = a$ имеет корни во множестве комплексных чисел.

4.2. Пусть $m \in C$. Какое преобразование координатной плоскости определяет функция $f(z) = z - m$, где $z \in C$?

Ответ. Из данного пункта следует, что эта функция задаёт параллельный перенос, определяемый парой чисел — координатами числа $(-m)$.

4.3. Какое преобразование координатной плоскости определяет функция $f(z) = \frac{z}{m}$ при $m = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$?

Ответ. Модуль числа $\frac{1}{m}$ равен 1, а аргумент равен $-\frac{\pi}{4}$. Поэтому функция определяет поворот координатной плоскости относительно начала системы координат на угол $-\frac{\pi}{4}$.

4.4.** Какое преобразование координатной плоскости определяет функция $f(z) = -z$, где $z \in C$?

Ответ. Точку $(-z)$ можно получить из точки z поворотом плоскости относительно начала системы координат на угол π. Следовательно, функция $f(z) = -z$ определяет поворот плоскости относительно начала координат на угол π. Это преобразование можно назвать также симметрией относительно начала системы координат.

4.5. Какое преобразование координатной плоскости определяет функция $f(z) = i(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$?

Ответ. Имеем $f(z) = a(z - m) + m$, где $a = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ и $m = 1 + 2i$. Поэтому функция $f(z)$ определяет поворот координатной плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно точки $1 + 2i$.

4.6.** Какое преобразование плоскости определяет функция $f(z) = (4 - 3i)z + 25$?

Ответ. Поскольку $|4 - 3i| = 5$, то из данного пункта следует, что функция $f(z)$ определяет преобразование подобия плоскости с коэффициентом подобия, равным 5.

4.7. При каких поворотах мнимая ось переводится в действительную ось?

Ответ. При поворотах вокруг начала системы координат на угол $\frac{\pi}{2}$ или на угол $-\frac{\pi}{2}$.

4.8. Как записать в комплексной форме уравнение прямой, состоящей из точек, которые равноудалены от точек i и $2 - 3i$?

Ответ. $|z - i| = |z - 2 + 3i|$.

4.9. Каким уравнением в комплексной плоскости задаётся окружность с центром в точке $1 - i$ и проходящая через точку 0?

Ответ. $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$.

Указания к решению наиболее трудных задач

6. Найдите, в какую фигуру преобразуется окружность радиуса 1 с центром в точке i с помощью функции:

а) $f(z) = iz + 1$; б) $f(z) = i(z - 1) + 1$;

в)** $f(z) = 2(z - i) + 3$; г)* $f(z) = -i(z - 2i) + 2$.

Указание. Один из возможных подходов к решению — найти центр окружности, в который переходит заданная окружность.

7.** Какая функция определяет симметрию комплексной плоскости относительно мнимой оси?

Указание. Симметрию относительно мнимой оси можно представить как последовательное выполнение симметрии относительно начала системы координат и симметрии относительно действительной оси.

8.** Какая функция определяет симметрию комплексной плоскости относительно прямой, содержащей биссектрису первого координатного угла?

Указание. Данная функция каждое ненулевое число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ переводит в число $r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right)$, которое равно $i \cdot \bar{z}$.

9.** Во что преобразуется окружность радиуса 1 с центром в точке $1 + i$ с помощью функции комплексного переменного $f(z)$?

а) $f(z) = \bar{z}$ б) $f(z) = -\bar{z}$ в) $f(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \cdot \bar{z}$

Указание. Во всех вариантах заданы функции, соответствующие перемещениям плоскости, поэтому окружность преобразуется в окружность, равную заданной окружности, и достаточно находить центр преобразованной окружности.

10.** В какую фигуру функция $f(z) = i \cdot z - 1$ переводит фигуру, заданную уравнением?

а) $|z - i| = 2$ б) $|z + 1| = |z - i|$

Указание. Данная функция соответствует некоторому перемещению плоскости. Поэтому в варианте а), как и в задаче 9, можно находить центр окружности, в которую переходит заданная окружность; в варианте б) в условии задана прямая, состоящая из всех точек, равноудалённых от точек -1 и i, поэтому можно находить точки, в которые данная функция переводит точки -1 и i .

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.1. Какое число не может быть значением функции $f(z) = \frac{z}{|z|}$?

1) i 2) $-i$ 3) $\frac{1-i}{2}$ 4) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Указание. Модули всех значений этой функции равны 1.

1.3. В какой точке находится центр поворота координатной плоскости, определяемого функцией $f(z) = i(z - i + 1) + i - 1$?

1) $i - 1$ 2) i 3) $1 - i$ 4) $\frac{(i-1)}{2}$

Указание. Если z_0 центр поворота, то $f(z_0) = z_0$.

1.4. Какая из перечисленных ниже функций определяет поворот?

1) $f(z) = 2iz + i + 1$ 2) $f(z) = -3iz + i + 2$
3) $f(z) = iz + 2i + 1$ 4) $f(z) = -2iz + i + 1$

Указание. Модуль коэффициента при переменной z должен равняться 1.

§ 5. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ МНИМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Цель параграфа — ознакомиться с формулой Эйлера для мнимых показателей и применением этой формулы для выражения тригонометрических функций через показательную функцию с мнимыми значениями аргумента.

Особенности параграфа. Основные начальные результаты, связанные с формулой Эйлера, приводятся без доказательства, поскольку известные способы их обоснования сложные и, вообще говоря, также основаны на некоторых предположениях, которые не следуют из известных свойств показательных функций. Поэтому при изучении данного параграфа нужно обратить внимание на приложения формулы Эйлера. В частности, в параграфе содержится представление тригонометрических функций через показательные функции с комплексными показателями, что в некоторых случаях позволяет преобразовывать тригонометрические выражения. Ввиду того что материал параграфа непростой, бо́льшая часть содержания рассчитана на третий уровень.

Предварительные знания, умения и навыки. Предполагается известным: тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Новые математические понятия и свойства: формула Эйлера для мнимых показателей; степень числа e с комплексным показателем; выражение функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ через показательную функцию с мнимым показателем.

Вспомогательные математические понятия и свойства: синус и косинус при комплексном значении аргумента.

Ответы на открытые вопросы к пунктам

5.1.* Как доказать, что $e^{i\pi} + 1 = 0$?

Ответ. По определению $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, откуда $e^{i\pi} + 1 = 0$.

5.2.* Как доказать, что для любых комплексных чисел u, v выполняется равенство $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$?

Ответ. Пусть $u = a + bi$, $v = c + di$. Тогда

$$e^{u+v} = e^{(a+c)+(b+d)i} = e^{(a+c)} \cdot e^{(b+d)i} = e^a \cdot e^c \cdot e^{bi} \cdot e^{di} =$$

$$= (e^a \cdot e^{bi}) \cdot (e^c \cdot e^{di}) = e^{a+bi} \cdot e^{c+di} = e^u \cdot e^v.$$

5.3.** Как упростить выражение $\cos i + i\sin i$?

Ответ. В пункте получено, что $\cos i = \dfrac{e^2-1}{2e}$, $\sin i = i \cdot \dfrac{e^2-1}{2e}$. Поэтому $\cos i + i\sin i = \dfrac{e^2-1}{2e} - \dfrac{e^2-1}{2e} = \dfrac{1}{e}$.

5.4.** Как должна перемещаться точка z из примера 4 для того, чтобы точка w совершила только один полный оборот по окружности?

Ответ. По условию точка $z = x + iy$ движется по прямой, параллельной оси Oy. Поэтому x — постоянное число. Если значение y будет изменяться от 0 до 2π, возрастая, то точка $w = e^x(\cos y + i\sin y)$ сделает полный оборот по окружности радиуса $r = e^x$ с центром в начале координат в положительном направлении.

5.5.** Как доказать, что функция e^z не принимает значение 0?

Ответ. При $z = x + iy$, где $x, y \in R$, комплексное число e^z определяется формулой $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Допустим, что для некоторых $x, y \in R$ имеет место равенство $e^x(\cos y + i\sin y) = 0$. Поскольку $e^x \neq 0$, то из последнего равенства получим $\cos y + i\sin y = 0$. Отсюда можно сделать вывод, что одновременно $\cos y = 0$ и $\sin y = 0$. Однако это невозможно, и поэтому составленное уравнение не имеет корней.

Указания к решению наиболее трудных задач

6.** Вычислите:

а) e^{1+2i}; б) e^{-1-i}; в) $e^{1+\pi i}$; г) $e^{1-2\pi i}$.

Указание. В пунктах а) и б) воспользоваться определением, и полученные выражения не упрощаются. В остальных пунктах воспользоваться тем, что $e^{\pi i} = -1$.

8.** Докажите, что $\cos i$, $\cos 2i$ — действительные числа, такие, что $\cos i > 1$ и $\cos 2i > 2$.

Указание. $\cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2} > \dfrac{e}{2}$, $\cos 2i = \dfrac{e^2 + e^{-2}}{2} > \dfrac{e^2}{2}$, причём число e больше 2.

11.** Докажите, что $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$.

Указание. $\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2$ при любом комплексном z.

Указания по работе с наиболее трудными тестами

1.2.* Чему равен модуль числа e^{2i}?

1) 1 2) 2 3) ln2 4) e^2

Указание. По формуле Эйлера данное число сразу представляется в тригонометрической форме.

1.3.* Чему равен аргумент числа e^{3i}?

1) 1 2) 3 3) $\dfrac{3}{\pi}$ 4) $\dfrac{\pi}{3}$

Указание. По формуле Эйлера данное число сразу представляется в тригонометрической форме.

1.4.* Какое из указанных значений может иметь $e^{\pi k i}$ при целом k?

1) −1 2) −2 3) −3 4) −4

Указание. Заданное выражение при целых k может иметь значения либо 1, либо −1.

2.2.** Сколько различных комплексных решений относительно z может иметь уравнение вида $e^z = w$, где w — заданное число из множества C комплексных чисел?

1) ни одного 2) ровно одно
3) ровно два 4) бесконечное множество

Указание. При $w = 0$ корней нет, при каждом из других значений w если число z_0 является корнем, то число $z_0 + 2\pi i$ также является корнем.

2.3.** Какие из перечисленных ниже чисел являются действительными?

1) $\cos i$ 2) $\sin i$ 3) $\operatorname{tg} i$ 4) $i \sin i$

Указание. $\cos i$ является действительным числом, а $\sin i$ — мнимым числом.

2.4.** Какие из указанных чисел равны числу, комплексно сопряжённому к числу e^{ix}, где x — действительное число?

1) $-\cos x + i \sin x$ 2) $\cos x - i \sin x$
3) e^{-ix} 4) $-e^{ix}$

Указание. Заданное в условии выражение равно $\cos x + i \sin x$.

ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1 ПО ТЕМЕ «ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ»

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $f(z)=\sqrt{\log_2(3-2x)}$.

2. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$; б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

3. Пусть $f_a(x)=\begin{cases} ax+1,\ x\le 1,\\ 2x-a,\ x>1.\end{cases}$ Найдите значение a, при котором функция $f_a(x)$ непрерывна в точке 1.

4. Используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $f(z)=\sqrt{\log_{0,25}(2x+3)}$.

2. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$; б)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

3. Пусть $f_a(x)=\begin{cases} ax-2,\ x<-1,\\ 3x-2a,\ x\ge -1.\end{cases}$ Найдите значение a, при котором функция $f_a(x)$ непрерывна в точке (-1).

4. Используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, найдите $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\sin x}$.

Вариант 3

1. Найдите область определения функции $f(z)=\sqrt{\log_4(2x-5)}$.

2. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-8}$; б)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$.

3. Пусть $f_a(x)=\begin{cases} ax-3,\ x\le 2,\\ 2x+a,\ x>2.\end{cases}$ Найдите значение a, при котором функция $f_a(x)$ непрерывна в точке 2.

4. Используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((\pi - 2x)\cdot \operatorname{tg} x)$.

Вариант 4

1. Найдите область определения функции $f(z) = \sqrt{\log_{0,5}(4 - 2x)}$.

2. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 12}$; б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2}x - 2}{\sqrt{5x-1} - 3}$.

3. Пусть $f_a(x) = \begin{cases} ax + 3, & x < -2, \\ 2x + a, & x \geq -2. \end{cases}$ Найдите значение a, при котором функция $f_a(x)$ непрерывна в точке (-2).

4. Используя замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, найдите $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x - \pi}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2 ПО ТЕМЕ «СФЕРА И ШАР»

Вариант 1

1. Найдите расстояние от центра O сферы радиуса 5 до плоскости, которая пересекает сферу по окружности диаметра 4.

2. Найдите радиус сферы, описанной вокруг правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 2 и боковым ребром $\sqrt{6}$.

3.* Сфера радиуса 6 касается граней двугранного угла величиной $\arccos\dfrac{1}{9}$. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания 6 и высотой 3.

Вариант 2

1. Найдите расстояние от центра O сферы радиуса 7 до плоскости, которая пересекает сферу по окружности диаметра 6.

2. Найдите радиус сферы, описанной вокруг правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 4 и боковым ребром $\sqrt{17}$.

3.* Сфера радиуса 9 касается граней двугранного угла величиной $\arccos\frac{7}{25}$. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания $2\sqrt{3}$ и высотой $2\sqrt{6}$.

Вариант 3

1. Найдите расстояние от центра O сферы радиуса 3 до плоскости, которая пересекает сферу по окружности диаметра 2.

2. Найдите радиус сферы, описанной вокруг правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 2 и боковым ребром $\sqrt{11}$.

3.* Сфера радиуса $2\sqrt{5}$ касается граней двугранного угла величиной $\arccos\frac{3}{8}$. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания $2\sqrt{3}$ и высотой $4\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Найдите расстояние от центра O сферы радиуса 9 до плоскости, которая пересекает сферу по окружности диаметра 8.

2. Найдите радиус сферы, описанной вокруг правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 4 и боковым ребром $\sqrt{33}$.

3.* Сфера радиуса $\sqrt{10}$ касается граней двугранного угла величиной $\arccos\frac{4}{9}$. Найдите расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла.

4. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания 6 и высотой $3\sqrt{5}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3
ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

Вариант 1

1. Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^3 + x^{-3}$ в точке $a = 0{,}5$.

2.* Определите, какое значение имеет $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\sqrt{2}}-2}{x^2-1}$.

3. Найдите производную функции:

а) $y=\operatorname{arctg}(2\sqrt{x})$; б) $y=e^{2x}\sin 3x$.

4. Найдите все точки, в которых производная функция $f(x)=\dfrac{x^2-3x-2}{(x+1)^2}$ равна нулю.

Вариант 2

1. Найдите значение производной функции $f(x) = x^2 + 4x^{-4}$ в точке $a=2$.

2.* Определите, какое значение имеет $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\sqrt{2}}-1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Найдите производную функции:

а) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x-2}\right)$; б) $y=e^{-x}\sin 2x$.

4. Найдите все точки, в которых производная функция $f(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{(x-2)^2}$ равна нулю.

Вариант 3

1. Найдите значение производной функции $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{6}x^{-3}$ в точке $a=0{,}5$.

2.* Определите, какое значение имеет $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\sqrt{3}}-1}{x^2-1}$.

3. Найдите производную функции:

а) $y=\operatorname{arctg}(2\sqrt{x+1})$; б) $y=e^{2x}\sin 2x$.

4. Найдите все точки, в которых производная функция $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{(x-1)^2}$ равна нулю.

Вариант 4

1. Найдите значение производной функции $f(x) = 3x^3 + x^{-2}$ в точке $a=\dfrac{1}{3}$.

2.* Определите, какое значение имеет $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{\sqrt{3}}-1}{\sqrt{x}-1}$.

3. Найдите производную функции:

а) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x-1}\right)$; б) $y=e^{-2x}\sin 3x$.

4. Найдите все точки, в которых производная функция $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 3}{(x + 2)^2}$ равна нулю.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4 ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ»

Вариант 1

1. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, точки K, L, M, N — середины рёбер AB, BC, CD, AD соответственно, точки E, F, G, H — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно. Укажите вектор, равный $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{MN}$.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра AC, L — точка пересечения медиан грани SBC. Выразите вектор $\overrightarrow{LK}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3.* Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точки $A(3; -1; 4)$, $B(1; -2; 3)$, при котором точке A соответствует значение параметра $t = 1$, точке B соответствует значение параметра $t = 0$.

4. Представьте вектор $\vec{m} = (1; 1; 3)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = (1; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$.

5. При параметрическом задании прямой в виде $x = a + kt$, $y = b + lt$, $z = c + mt$ рассматривают точки A, B, C, которые получаются при значениях параметра 0, 1 и −2 соответственно. Найдите отношение длины отрезка AC к длине отрезка BC.

Вариант 2

1. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, точки K, L, M, N — середины рёбер AB, BC, CD, AD соответственно, точки E, F, G, H — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно. Укажите вектор, равный $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NG}$.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра SA, L — точка пересечения медиан грани ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{KL}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3.* Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точки $A(2; -3; 5)$, $B(4; -4; 2)$, при котором точке A соответствует значение параметра $t = 1$, точке B соответствует значение параметра $t = 0$.

4. Представьте вектор $\vec{m} = (-2; 1; 3)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = (1; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$.

5. При параметрическом задании прямой в виде $x = a + kt$, $y = b + lt$, $z = c + mt$ рассматривают точки A, B, C, которые получаются при значениях параметра 0, 1 и 4 соответственно. Найдите отношение длины отрезка AC к длине отрезка BC.

Вариант 3

1. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, точки K, L, M, N — середины рёбер AB, BC, CD, AD соответственно, точки E, F, G, H — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно. Укажите вектор, равный $\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{GA}$.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра SA, L — точка пересечения медиан грани SBC. Выразите вектор $\overrightarrow{LK}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3.* Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точки $A(-1; -2; 3)$, $B(-2; 1; -1)$, при котором точке A соответствует значение параметра $t = 1$, точке B соответствует значение параметра $t = 0$.

4. Представьте вектор $\vec{m} = (2; -3; 1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = (1; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$.

5. При параметрическом задании прямой в виде $x = a + kt$, $y = b + lt$, $z = c + mt$ рассматривают точки A, B, C, которые получаются при значениях параметра 0, 1 и -3 соответственно. Найдите отношение длины отрезка AC к длине отрезка BC.

Вариант 4

1. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, точки K, L, M, N — середины рёбер AB, BC, CD, AD соответственно, точки E, F, G, H — середины рёбер SA, SB, SC, SD соответственно. Укажите вектор, равный $\overrightarrow{EL} + \overrightarrow{NB}$.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ точка K — середина ребра BC, L — точка пересечения медиан грани SAB. Выразите вектор $\overrightarrow{KL}$ через векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3.* Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точки $A(-2; 3; -4)$, $B(1; 2; -5)$, при котором точке A соответствует значение параметра $t = 1$, точке B соответствует значение параметра $t = 0$.

4. Представьте вектор $\vec{m} = (3; 2; -1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = (1; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$.

5. При параметрическом задании прямой в виде $x = a + kt$, $y = b + lt$, $z = c + mt$ рассматривают точки A, B, C, которые получаются при значениях параметра 0, 1 и 5 соответственно. Найдите отношение длины отрезка AC к длине отрезка BC.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5 ПО ТЕМЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ»

Вариант 1

1. Найдите производную функции $f(x) = \ln|2x + 2|$ на промежутке $(-\infty; -1)$.

2. Найдите вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x + 4}{2x^2 - x - 6}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x + 2}$, $a = 1$.

4.* Найдите точки локального экстремума функции $f(x) = |x^2 + 3x - 4|$.

5. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x + 2}$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $f(x) = \ln|2 - 2x|$ на промежутке $(1; \infty)$.

2. Найдите вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x^2 + x - 1}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 3}$, $a = 4$.

4.* Найдите точки локального экстремума функции $f(x) = |x^2 - 3x - 10|$.

5. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \dfrac{(x - 1)^2}{x - 3}$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{2}\right|$ на промежутке $(-\infty; -1)$.

2. Найдите вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x+3}{2x^2 - 3x - 2}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x+3}$, $a = 1$.

4.* Найдите точки локального экстремума функции $f(x) = |x^2 + 5x - 6|$.

5. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-1}$.

Вариант 4

1. Найдите производную функции $f(x) = \ln\left|\frac{1-x}{2}\right|$ на промежутке $(1; \infty)$.

2. Найдите вертикальные асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x-4}{2x^2 + 3x - 9}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \frac{10\sqrt{x}}{x+1}$, $a = 4$.

4.* Найдите точки локального экстремума функции $f(x) = |x^2 - x - 6|$.

5. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6 ПО ТЕМЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ»

Вариант 1

1. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = 3x^3 + \frac{1}{x}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ на всей числовой прямой.

3.* Найдите горизонтальные асимптоты функции $f(x) = \frac{|2x-1|}{x+2}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

4. а) Проведите исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{2x - 4}$ и постройте её график.

б) Определите, при каких значениях a уравнение $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{x - 2} = 0$ имеет хотя бы один корень.

Вариант 2

1. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{12x}{1 + 9x^2}$ на всей числовой прямой.

3.* Найдите горизонтальные асимптоты функции $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{|x - 1|}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

4. а) Проведите исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 10}{3x + 3}$ и постройте её график.

б) Определите, при каких значениях a уравнение $\dfrac{x^2 + 2x + 10}{x + 1} = a$ имеет хотя бы один корень.

Вариант 3

1. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = x + \dfrac{3}{x^3}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{6x}{1 + 4x^2}$ на всей числовой прямой.

3.* Найдите горизонтальные асимптоты функции $f(x) = \dfrac{|2x + 1|}{1 - x}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

4. а) Проведите исследование функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x - 2}$ и постройте её график.

б) Определите, при каких значениях a уравнение $\dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = a$ имеет хотя бы один корень.

Вариант 4

1. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{4x^2}$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{12x}{4 + 9x^2}$ на всей числовой прямой.

3.* Найдите горизонтальные асимптоты функции $f(x)=\dfrac{3x-1}{|2x-3|}$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

4. а) Проведите исследование функции $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 1}{2x - 4}$ и постройте её график.

б) Определите, при каких значениях a уравнение $\dfrac{4x^2 - 4x + 2}{2x - 1} = a$ имеет хотя бы один корень.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7 ПО ТЕМЕ «МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Вариант 1

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{c}$, если $\vec{a} = (-1; 1; -1)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 1; -3)$.

2. Найдите угол между плоскостью Oxz и плоскостью, проходящей через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$ и $C(0; 0; 4)$.

3. Найдите угол между плоскостью и уравнением $2x - 3y + 4z - 1 = 0$ и прямой, проходящей через $A(3; -1; 5)$ и $B(6; 2; 7)$.

4. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(2; 3; 1)$, $B(3; -2; 1)$ и перпендикулярна плоскости $x + y + 2z = 0$.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде с ребром основания 6 и высотой 8 найдите косинус угла между плоскостями сходных боковых граней.

Вариант 2

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, если $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 1; 2)$, $\vec{c} = (-1; -2; 1)$.

2. Найдите угол между плоскостью Oxz и плоскостью, проходящей через точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ и $C(0; 0; -2)$.

3. Найдите угол между плоскостью и уравнением $3x - 4y - z + 2 = 0$ и прямой, проходящей через $A(-2; 6; -4)$ и $B(-3; 4; -2)$.

4. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(1; 3; 1)$, $B(-2; -2; -2)$ и перпендикулярна плоскости $2x + y + z = 0$.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде с ребром основания 4 и высотой 5 найдите косинус угла между плоскостями сходных боковых граней.

Вариант 3

1. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{c}$, если $\vec{a} = (0;\ 1;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ -2)$, $\vec{c} = (3;\ 1;\ 2)$.

2. Найдите угол между плоскостью Oxz и плоскостью, проходящей через точки $A(-2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -5;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 3)$.

3. Найдите угол между плоскостью и уравнением $x + 3y + 2z - 3 = 0$ и прямой, проходящей через $A(5;\ 1;\ 3)$ и $B(2;\ -2;\ 1)$.

4. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(1;\ -3;\ -1)$, $B(3;\ 4;\ 2)$ и перпендикулярна плоскости $2x + 3y + z = 0$.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде с ребром основания 2 и высотой 3 найдите косинус угла между плоскостями сходных боковых граней.

Вариант 4

1. Найдите косинус угла между векторами $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{c}$, если $\vec{a} = (1;\ 3;\ -2)$, $\vec{b} = (1;\ 3;\ -2)$, $\vec{c} = (2;\ 2;\ -2)$.

2. Найдите угол между плоскостью Oxz и плоскостью, проходящей через точки $A(-1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ -5)$.

3. Найдите угол между плоскостью и уравнением $4x + 2y - 6z + 5 = 0$ и прямой, проходящей через $A(2;\ -2;\ -4)$ и $B(5;\ 1;\ -2)$.

4. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(1;\ -3;\ 3)$, $B(4;\ 4;\ 2)$ и перпендикулярна плоскости $3x + 2y + z = 0$.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде с ребром основания 4 и высотой 8 найдите косинус угла между плоскостями сходных боковых граней.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8
ПО ТЕМЕ «МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Вариант 1

1. Найдите расстояние от точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ до плоскости с уравнением $2x - y - 2z + 4 = 0$.

2. Найдите координаты центра и радиус сторон с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 2z = 1$.

3. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;\ -1;\ 3)$ на плоскость с уравнением $x - 2y + z + 3 = 0$.

4. Найдите радиус сферы с центром в точке $A(1; -1; -1)$, которая касается плоскости с уравнением $8x + 4y - z - 3 = 0$.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 найдите расстояние от вершины A до плоскости, которая проходит через вершины B_1, D и середину ребра CC_1.

Вариант 2

1. Найдите расстояние от точки $A(5; -1; -2)$ до плоскости с уравнением $x + 2y - 2z + 8 = 0$.

2. Найдите координаты центра и радиус сторон с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + 3z = 2$.

3. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(3; 2; -4)$ на плоскость с уравнением $2x + y - z = 0$.

4. Найдите радиус сферы с центром в точке $A(-1; 1; -1)$, которая касается плоскости с уравнением $4x + 8y + z + 1 = 0$.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 найдите расстояние от вершины D_1 до плоскости, которая проходит через вершины A_1, C и середину ребра AD.

Вариант 3

1. Найдите расстояние от точки $A(3; 5; -1)$ до плоскости с уравнением $2x - 2y + z + 2 = 0$.

2. Найдите координаты центра и радиус сторон с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 6z = 1$.

3. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(-3; 4; -3)$ на плоскость с уравнением $x + y - 2z + 1 = 0$.

4. Найдите радиус сферы с центром в точке $A(1; 1; -1)$, которая касается плоскости с уравнением $x + 4y + 8z - 2 = 0$.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости, которая проходит через вершины A_1, C и середину ребра C_1D_1.

Вариант 4

1. Найдите расстояние от точки $A(2; -3; 4)$ до плоскости с уравнением $x - 2 - 2z + 9 = 0$.

2. Найдите координаты центра и радиус сторон с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + z = 3$.

3. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(1;\ 2;\ -1)$ на плоскость с уравнением $x + 2y - z - 3 = 0$.

4. Найдите радиус сферы с центром в точке $A(-1;\ -1;\ 1)$, которая касается плоскости с уравнением $x - 8y - 4z + 1 = 0$.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 найдите расстояние от вершины B до плоскости, которая проходит через вершины A_1, C_1 и середину ребра A_1B_1.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9 ПО ТЕМЕ «ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Вариант 1

1. Найдите $\int x(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \cos x + \cos 2x$, которая проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

3. Найдите функцию, одна из первообразных которой имеет вид $\ln\frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$.

4.* Найдите $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}}dx$.

5. Найдите все функции, определённые на числовой прямой, для каждой из которых производная является некоторой первообразной функции $f(x) = \cos 2x$.

Вариант 2

1. Найдите $\int x^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin x - \sin 2x$, которая проходит через точку $\left(\frac{\pi}{3};\ 1\right)$.

3. Найдите функцию, одна из первообразных которой имеет вид $\ln\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}$.

4.* Найдите $\int \frac{x}{\sqrt{x - 2}}dx$.

5. Найдите все функции, определённые на числовой прямой, для каждой из которых производная является некоторой первообразной функции $f(x) = \sin(\sqrt{2} \cdot x)$.

Вариант 3

1. Найдите $\int x\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \cos x - \cos 3x$, которая проходит через точку $\left(\frac{\pi}{2}; -1\right)$.

3. Найдите функцию, одна из первообразных которой имеет вид $\ln\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3}$.

4.* Найдите $\int \frac{x}{\sqrt{3 + x}}dx$.

5. Найдите все функции, определённые на числовой прямой, для каждой из которых производная является некоторой первообразной функции $f(x) = -\sin 2x$.

Вариант 4

1. Найдите $\int x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin 3x + \sin x$, которая проходит через точку $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

3. Найдите функцию, одна из первообразных которой имеет вид $\ln\frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}$.

4.* Найдите $\int \frac{x}{\sqrt{x - 3}}dx$.

5. Найдите все функции, определённые на числовой прямой, для каждой из которых производная является некоторой первообразной функции $f(x) = -\cos\left(\sqrt{2} \cdot x\right)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10 ПО ТЕМЕ «ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ПЛОЩАДЬ ФИГУР»

Вариант 1

1. Вычислите $\int_{\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x)=\dfrac{30}{(x+2)^3}$, $a=1$, $b=3$.

3. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, которая ограничена параболой $y=x^2+4x+3$ и прямой $y=2$.

4. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от $-a$ до a, если $f(x)=\dfrac{4}{1+4x^2}$, $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.* Функция $f(x)$ задаётся с помощью двух формул: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & -1\le x\le 0,\\ (x-1)^2, & 0\le x\le 1.\end{cases}$ Найдите $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

Вариант 2

1. Вычислите $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\dfrac{x}{6}dx$.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x)=\dfrac{45}{(x-2)^3}$, $a=5$, $b=8$.

3. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, которая ограничена параболой $y=x^2-2x-1$ и прямой $y=1$.

4. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от $-a$ до a, если $f(x)=\dfrac{4}{4+x^2}$, $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5.* Функция $f(x)$ задаётся с помощью двух формул: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4}, & -4\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(x-2)^2, & 0\le x\le 2.\end{cases}$ Найдите $\int\limits_{-4}^{2} f(x)dx$.

Вариант 3

1. Вычислите $\int\limits_{3\pi}^{4\pi}\sin\dfrac{x}{6}dx$.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x)=\dfrac{20}{(x+3)^3}$, $a=-1$, $b=3$.

3. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, которая ограничена параболой $y = x^2 + 6x + 8$ и прямой $y = 2$.

4. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от $-a$ до a, если $f(x) = \frac{9}{1 + 9x^2}$, $a = \frac{1}{3}$.

5.* Функция $f(x)$ задаётся с помощью двух формул: $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & -1 \le x \le 0, \\ \sqrt{1-x}, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$ Найдите $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$.

Вариант 4

1. Вычислите $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\frac{x}{3}dx$.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \frac{3}{(x-1)^3}$, $a = 2$, $b = 6$.

3. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, которая ограничена параболой $y = x^2 - 4x + 2$ и прямой $y = 1$.

4. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от $-a$ до a, если $f(x) = \frac{9}{9 + x^2}$, $a = \sqrt{3}$.

5.* Функция $f(x)$ задаётся с помощью двух формул: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2, & -2 \le x \le 0, \\ \sqrt{4-x}, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$ Найдите $\int\limits_{-2}^{4} f(x)dx$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11 ПО ТЕМЕ «ОБЪЁМ ТЕЛ»

Вариант 1

1. Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{2x - 3}$, $a = 1\frac{1}{2}$, $b = 3$.

2. Найдите объём тела, которое получится, если прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ вращать вокруг гипотенузы.

3. а) Докажите, что $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$. б) Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = 1 + \sin x$ для x из промежутка $[0; \pi]$.

4.* При вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{4}{x+1}$ в пределах от 0 до m получается тело, объём которого равен 3π. Найдите m.

Вариант 2

1. Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{3x-2}$, $a = 1\frac{2}{3}$, $b = 2$.

2. Найдите объём тела, которое получится, если прямоугольный треугольник с катетами 10 и $3\sqrt{10}$ вращать вокруг гипотенузы.

3. а) Докажите, что $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$. б) Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ для x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4.* При вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{5}{x+2}$ в пределах от 0 до m получается тело, объём которого равен 2π. Найдите m.

Вариант 3

1. Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$.

2. Найдите объём тела, которое получится, если прямоугольный треугольник с катетами $3\sqrt{5}$ и $6\sqrt{5}$ вращать вокруг гипотенузы.

3. а) Докажите, что $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$. б) Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = 2 - \sin x$ для x из промежутка $[0; \pi]$.

4.* При вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{6}{x-1}$ в пределах от 2 до m получается тело, объём которого равен 5π. Найдите m.

Вариант 4

1. Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $a = -\frac{1}{3}$, $b = 1$.

2. Найдите объём тела, которое получится, если прямоугольный треугольник с катетами $\frac{\sqrt{10}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ вращать вокруг гипотенузы.

3. а) Докажите, что $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$. б) Найдите объём тела, которое получится при вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = 1 - \cos x$ для x из промежутка $[0; \pi]$.

4.* При вращении криволинейной трапеции с границей $f(x) = \frac{7}{x-2}$ в пределах от 4 до m получается тело, объём которого равен 3π. Найдите m.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12 ПО ТЕМЕ «УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ»

Вариант 1

1. Найдите вероятность угадать задуманное двузначное число, если известно, что это число нечётное и больше 80.

2.* Найдите вероятность того, что при четырёхкратном подбрасывании монеты 3 раза выпадет орёл.

3. События H_1, H_2, H_3 образуют полный класс событий и $P(H_1) = \frac{1}{3}$, $P(H_2) = \frac{1}{6}$. Найдите вероятность события A, если известно, что $P(A|H_1) = \frac{1}{4}$, $P(A|H_2) = \frac{3}{4}$, $P(A|H_3) = \frac{1}{4}$.

4. Из барабана, содержащего 12 шаров, среди которых 5 шаров белого цвета, последовательно извлекаются шары и выкладываются на стол. Найдите вероятность того, что вторым будет извлечён шар белого цвета, если: а) первым был извлечён шар белого цвета; б) первым был извлечён шар не белого цвета.

Вариант 2

1. Найдите вероятность угадать задуманное двузначное число, если известно, что это число чётно и не больше 30.

2.* Найдите вероятность того, что при пятикратном подбрасывании монеты 2 раза выпадет орёл.

3. События H_1, H_2, H_3 образуют полный класс событий и $P(H_2) = \frac{1}{3}$, $P(H_3) = \frac{1}{4}$. Найдите вероятность события A, если известно, что $P(A \mid H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid H_3) = \frac{2}{3}$.

4. Из барабана, содержащего 14 шаров, среди которых 6 шаров белого цвета, последовательно извлекаются шары и выкладываются на стол. Найдите вероятность того, что вторым будет извлечён шар белого цвета, если: а) первым был извлечён шар белого цвета; б) первым был извлечён шар не белого цвета.

Вариант 3

1. Найдите вероятность угадать задуманное двузначное число, если известно, что это число нечётное и не меньше 70.

2.* Найдите вероятность того, что при четырёхкратном подбрасывании монеты 2 раза выпадет орёл.

3. События H_1, H_2, H_3 образуют полный класс событий и $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность события A, если известно, что $P(A \mid H_1) = \frac{5}{6}$, $P(A \mid H_2) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid H_3) = \frac{3}{4}$.

4. Из барабана, содержащего 13 шаров, среди которых 5 шаров белого цвета, последовательно извлекаются шары и выкладываются на стол. Найдите вероятность того, что вторым будет извлечён шар белого цвета, если: а) первым был извлечён шар белого цвета; б) первым был извлечён шар не белого цвета.

Вариант 4

1. Найдите вероятность угадать задуманное двузначное число, если известно, что это число чётно и меньше 40.

2.* Найдите вероятность того, что при пятикратном подбрасывании монеты 3 раза выпадет орёл.

3. События H_1, H_2, H_3 образуют полный класс событий и $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{6}$. Найдите вероятность события A, если известно, что $P(A \mid H_1) = \frac{2}{3}$, $P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid H_3) = \frac{3}{4}$.

4. Из барабана, содержащего 11 шаров, среди которых 7 шаров белого цвета, последовательно извлекаются шары и выкладываются на стол. Найдите вероятность того, что вторым будет извлечён шар белого цвета, если: а) первым был извлечён шар белого цвета; б) первым был извлечён шар не белого цвета.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13 ПО ТЕМЕ «ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ»

Вариант 1

1. Найдите основной период функции $f(x) = \cos\left(\frac{3}{8}x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Найдите, какое наибольшее значение может принимать функция $f(x) = 2\sin 3x - \sqrt{5}\cos 3x$.

3. Найдите все корни уравнения $\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 3x = 0$.

4. Найдите положительное число, которое является периодом функции $f(x) = \cos x + \cos\frac{3}{4}x$.

5. Докажите, что число π является периодом функции $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$.

Вариант 2

1. Найдите основной период функции $f(x) = \sin\left(\frac{4}{5}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найдите, какое наибольшее значение может принимать функция $f(x) = \sqrt{7}\sin 4x - 3\cos 4x$.

3. Найдите все корни уравнения $\sin x - \cos x - \sqrt{2}\sin 3x = 0$.

4. Найдите положительное число, которое является периодом функции $f(x) = \sin x + \cos\frac{4}{7}x$.

5. Докажите, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x) = \sin 6x \cdot \cos 2x$.

Вариант 3

1. Найдите основной период функции $f(x) = \cos\left(\frac{5}{9}x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Найдите, какое наибольшее значение может принимать функция $f(x) = \sqrt{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

3. Найдите все корни уравнения $\sin x + \cos x - \sqrt{2}\sin 3x = 0$.

4. Найдите положительное число, которое является периодом функции $f(x) = \cos x + \sin\frac{5}{8}x$.

5. Докажите, что число π является периодом функции $f(x) = \sin x \cdot \sin 5x$.

Вариант 4

1. Найдите основной период функции $f(x) = \sin\left(\frac{3}{7}x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Найдите, какое наибольшее значение может принимать функция $f(x) = \sqrt{3}\sin 5x + \sqrt{6}\cos 5x$.

3. Найдите все корни уравнения $\sin x - \cos x + \sqrt{2}\sin 3x = 0$.

4. Найдите положительное число, которое является периодом функции $f(x) = \sin x + \sin\frac{4\pi}{9}x$.

5. Докажите, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x) = \cos 2x \cdot \cos 6x$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14 ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Вариант 1

1. Найдите все значения аргумента числа $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

2. Найдите, чему равен синус аргумента числа $z = -1 - 3i$.

3. Запишите в тригонометрической форме число $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right)^2$.

4. Найдите комплексный корень уравнения $f(z) = z$, если $f(z) = (2 + i)z - 4 - 2i$.

5.* Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Запишите в тригонометрической форме число $-1 - z^2$.

Вариант 2

1. Найдите все значения аргумента числа $z = -\sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

2. Найдите, чему равен косинус аргумента числа $z = 2 - 4i$.

3. Запишите в тригонометрической форме число $\left(\frac{3i + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}\right)^2$.

4. Найдите комплексный корень уравнения $f(z) = z$, если $f(z) = (3 - 2i)z + 2 + 6i$.

5.* Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Запишите в тригонометрической форме число $1 - z$.

Вариант 3

1. Найдите все значения аргумента числа $z = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

2. Найдите, чему равен синус аргумента числа $z = -6 + 2i$.

3. Запишите в тригонометрической форме число $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^2$.

4. Найдите комплексный корень уравнения $f(z) = z$, если $f(z) = (2 - 3i)z - 5 + 5i$.

5.* Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Запишите в тригонометрической форме число $1 - z^2$.

Вариант 4

1. Найдите все значения аргумента числа $z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i$.

2. Найдите, чему равен косинус аргумента числа $z = -6 + 3i$.

3. Запишите в тригонометрической форме число $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - 3i}\right)^2$.

4. Найдите комплексный корень уравнения $f(z) = z$, если $f(z) = (3 + i)z - 8 + i$.

5.* Пусть $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Запишите в тригонометрической форме число $-1 - z$.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1
ПО ТЕМЕ «СФЕРА И ШАР»

Вариант 1

1. Шар радиуса 6 касается плоскости α. Точка находится в плоскости α на расстоянии 8 от точки касания. Найдите наибольшее расстояние от точки A до точек шара.

2. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани квадраты. Найдите длины рёбер этой призмы.

3.* В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 3, радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен 2. Вторая сфера с радиусом 1 касается граней трёхгранного угла пирамиды с вершиной A. Найдите расстояние от центра второй сферы до вершины A.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA перпендикулярно основанию, и $SA = 2$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, C и середину ребра SC.

Вариант 2

1. Шар радиуса 5 касается плоскости α. Точка находится в плоскости α на расстоянии 12 от точки касания. Найдите наименьшее расстояние от точки A до точек шара.

2. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, у которой боковые рёбра в 2 раза больше рёбер основания. Найдите боковое ребро этой пирамиды.

3.* В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 6, радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен 3. Вторая сфера с радиусом 1 касается граней трёхгранного угла пирамиды с вершиной A. Найдите расстояние от центра второй сферы до вершины A.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, ребро SA перпендикулярно основанию, и $SA = 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, C и середину ребра SC.

Вариант 3

1. Шар радиуса 10 касается плоскости α. Точка находится в плоскости α на расстоянии 24 от точки касания. Найдите наибольшее расстояние от точки A до точек шара.

2. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма, у которой боковые рёбра в 2 раза больше рёбер основания. Найдите рёбра основания этой призмы.

3.* В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 3, радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен 1,5. Вторая сфера с радиусом 1 касается граней трёхгранного угла пирамиды с вершиной A. Найдите расстояние от центра второй сферы до вершины A.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA перпендикулярно основанию, и $SA = 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, C и середину ребра SC.

Вариант 4

1. Шар радиуса 7 касается плоскости α. Точка находится в плоскости α на расстоянии 24 от точки касания. Найдите наименьшее расстояние от точки A до точек шара.

2. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида, у которой боковые рёбра в 1,5 раза больше рёбер основания. Найдите ребро основания этой пирамиды.

3.* В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 6, радиус сферы, вписанной в пирамиду, равен 2. Вторая сфера с радиусом 1 касается граней трёхгранного угла пирамиды с вершиной A. Найдите расстояние от центра второй сферы до вершины A.

4. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, ребро SA перпендикулярно основанию, и $SA = 5$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, C и середину ребра SC.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

Вариант 1

1. Найдите производную функции:

а) $y = x\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = x^2 \ln x^2$.

2. Найдите значение производной функции $f(z) = \sqrt{4x^2 + 9}$ в точке $a = -2$.

3. Найдите производную функции $y = \ln f(x)$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = (\sin x)^{2\cos x}$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = x\sqrt{x+1}$, $a = 3$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}(x-1)}{2}$.

Вариант 2

1. Найдите производную функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$; б) $y = \dfrac{x}{e^x}$.

2. Найдите значение производной функции $f(z) = \sqrt{9x^2 + 16}$ в точке $a = 1$.

3. Найдите производную функции $y = \ln f(x)$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = (2\sin x)^{-\cos^2 x}$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = x\sqrt{x-1}$, $a = 2$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции:

а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. Найдите значение производной функции $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 9}}$ в точке $a = 2$.

3. Найдите производную функции $y = \ln f(x)$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = (2\cos x)^{\sin x}$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$, $a = 1$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{\sqrt{6}}$.

Вариант 4

1. Найдите производную функции:

а) $y = x\sqrt[3]{x}$; б) $y = \frac{e^x}{x}$.

2. Найдите значение производной функции $f(z) = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 16}}$ в точке $a = -1$.

3. Найдите производную функции $y = \ln f(x)$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = (\cos x)^{-2\sin x}$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$, $a = 4$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3
ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ»

Вариант 1

1. Найдите координаты точки C, которая расположена на отрезке AB, если $A(2; -3; 4)$, $B(-3; 4; -1)$ и $AC : CB = 3 : 2$.

2. В тетраэдре $SABC$ точки K на ребре SA и L на ребре BC расположены так, что $AK : KS = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 3$, точка M — середина отрезка KL. Представьте вектор $\overrightarrow{SM}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3. В координатном пространстве задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 так, что $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $A_1(1; -1; 2)$. Точки K, L, M расположены соответственно на отрезках AA_1, B_1C_1, CD_1 так, что $AK : KA_1 = 2 : 5$, $B_1L : LC_1 = 3 : 4$, $CM : MD_1 = 1 : 6$. Найдите координаты точек K, L и M.

4. Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точку $C(-3; 2; -4)$ и параллельной прямой AB, где $A(-2; 4; 5)$, $B(-5; 2; -1)$.

5. На прямой с параметрическим заданием $x = 3 - 2t$, $y = 5 + 3t$, $z = -2 - t$ найдите координаты точки, которая принадлежит плоскости Oxz.

Вариант 2

1. Найдите координаты точки C, которая расположена на отрезке AB, если $A(-1; -3; 5)$, $B(2; -5; 1)$ и $AC : CB = 2 : 3$.

2. В тетраэдре $SABC$ точки K на ребре SA и L на ребре BC расположены так, что $AK : KS = 1 : 3$, $BL : LC = 1 : 3$, точка M — середина отрезка KL. Представьте вектор $\overrightarrow{SM}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3. В координатном пространстве задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 так, что $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $A_1(1; -1; 2)$. Точки K, L, M расположены соответственно на отрезках A_1B_1, CC_1, AD_1 так, что $A_1K : KB_1 = 1 : 4$, $CL : LC_1 = 2 : 3$, $AM : MD_1 = 3 : 2$. Найдите координаты точек K, L и M.

4. Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точку $C(1; -3; -2)$ и параллельной прямой AB, где $A(2; 5; -1)$, $B(-1; 7; -2)$.

5. На прямой с параметрическим заданием $x = -1 + 4t$, $y = 2 - 3t$, $z = 4 - 5t$ найдите координаты точки, которая принадлежит плоскости Oyz.

Вариант 3

1. Найдите координаты точки C, которая расположена на отрезке AB, если $A(4; -2; 6)$, $B(-3; 12; -1)$ и $AC : CB = 2 : 5$.

2. В тетраэдре $SABC$ точки K на ребре SA и L на ребре BC расположены так, что $AK : KS = 2 : 1$, $BL : LC = 3 : 1$, точка M — середина отрезка KL. Представьте вектор $\overrightarrow{SM}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3. В координатном пространстве задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 так, что $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $A_1(1; -1; 2)$. Точки K, L, M расположены соответственно на отрезках AD, BB_1, A_1C_1 так, что $AK : KD = 3 : 4$, $BL : LB = 6 : 1$, $A_1M : MC_1 = 5 : 2$. Найдите координаты точек K, L и M.

4. Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точку $C(-4; -6; 5)$ и параллельной прямой AB, где $A(-2; -3; -4)$, $B(1; -2; -6)$.

5. На прямой с параметрическим заданием $x = 2 - 4t$, $y = -5 + 2t$, $z = 1 + 3t$ найдите координаты точки, которая принадлежит плоскости Oxy.

Вариант 4

1. Найдите координаты точки C, которая расположена на отрезке AB, если $A(-2; -4; 3)$, $B(12; 3; -4)$ и $AC : CB = 4 : 3$.

2. В тетраэдре $SABC$ точки K на ребре SA и L на ребре BC расположены так, что $AK : KS = 3 : 1$, $BL : LC = 1 : 2$, точка M — середина отрезка KL. Представьте вектор $\overrightarrow{SM}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$.

3. В координатном пространстве задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 так, что $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 1; 0)$, $A_1(1; -1; 2)$. Точки K, L, M расположены соответственно на отрезках BC, DD_1, AB_1 так, что $BK : KC = 4 : 1$, $DL : LD = 3 : 2$, $AM : MB_1 = 2 : 3$. Найдите координаты точек K, L и M.

4. Найдите параметрическое задание прямой, проходящей через точку $C(2; 5; -7)$ и параллельной прямой AB, где $A(3; -2; 6)$ $B(-1; 1; 5)$.

5. На прямой с параметрическим заданием $x = 2 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4 - 5t$ найдите координаты точки, которая принадлежит плоскости Oyz.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 ПО ТЕМЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ»

Вариант 1

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, $a = 3$.

2. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = (x^2 + x - 2)^2$.

3. Найдите уравнение асимптоты графика функции $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 3x}$ при $x \to +\infty$.

4. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x+1)^2}, & x < -1, \\ \dfrac{x^2}{x+1}, & x > -1. \end{cases}$

Вариант 2

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x) = \sqrt{3x - 2}$, $a = 2$.

2. Найдите промежутки возрастания функции $f(x) = (x^2 + x - 6)^2$.

3. Найдите уравнение асимптоты графика функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{9x^2 + 3x}$ при $x \to +\infty$.

4. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}, & x<1,\\ \dfrac{x^2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

Вариант 3

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x)=\sqrt{1-2x}$, $a=-4$.

2. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)=(x^2-3x+2)^2$.

3. Найдите уравнение асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2+x}$ при $x\to+\infty$.

4. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x+2)^2}, & x<-2,\\ \dfrac{x^2}{x+1}, & x>-2.\end{cases}$

Вариант 4

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой a, если $f(x)=\sqrt{1-3x}$, $a=-1$.

2. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)=(x^2+5x+4)^2$.

3. Найдите уравнение асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{9x^2-6x}$ при $x\to+\infty$.

4. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x-2)^2}, & x<2,\\ \dfrac{x^2}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5
ПО ТЕМЕ «МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Вариант 1

1. Известно, что точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскости α. Найдите уравнение этой плоскости, если $A(1;\ 2;\ -1)$.

2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и B параллельно прямой CD, если $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ -2)$, $C(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 1)$.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 2 и высотой $SH=4$ точки K и L — середины рёбер SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми DK и BL.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB = 3$, $BC = 4$, $AA_1 = 1$. Найдите угол между плоскостями A_1BD и C_1BD.

Вариант 2

1. Известно, что точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскости α. Найдите уравнение этой плоскости, если $A(2; -1; 3)$.

2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и B параллельно прямой CD, если $A(1; 0; 0)$, $B(-1; -1; 3)$, $C(0; 1; 1)$, $D(1; -1; 2)$.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 2 и высотой $SH = 6$ точки K и L — середины рёбер SA и CD соответственно. Найдите угол между прямыми SD и KL.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB = 2$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и CB_1D_1.

Вариант 3

1. Известно, что точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскости α. Найдите уравнение этой плоскости, если $A(-3; -1; 1)$.

2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и B параллельно прямой CD, если $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(0; 1; 0)$, $D(2; 0; 1)$.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 4 и высотой $SH = 4$ точки K и L — середины рёбер SC и SD соответственно. Найдите угол между прямыми DK и AL.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 2$. Найдите угол между плоскостями AB_1C и AD_1C.

Вариант 4

1. Известно, что точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскости α. Найдите уравнение этой плоскости, если $A(-2; 3; -1)$.

2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки A и B параллельно прямой CD, если $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(1;\ 0;\ 2)$, $C(1;\ 0;\ 1)$, $D(2;\ -1;\ -1)$.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 4 и высотой $SH = 6$ точки K и L — середины рёбер AD и SC соответственно. Найдите угол между прямыми SK и BL.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB = 3$, $BC = 5$, $AA_1 = 2$. Найдите угол между плоскостями A_1BC_1 и A_1DC_1.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 ПО ТЕМЕ «УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ»

Вариант 1

1. Найдите первообразную функции $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$, график которой проходит через точку $(1;\ 0)$.

2. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{x}{x^2 + 4}dx$.

3. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = (x - 1)^3$, график которой проходит через точку $(3;\ 1)$. Найдите $F(2)$.

4. Докажите, что на промежутке $(-1;\ \infty)$ выполняется равенство $\int \frac{2x + 3}{(x + 1)^2}dx = 2\ln(x + 1) - \frac{1}{x + 1} + C$.

5.* Найдите неопределённый интеграл $\int \sin x \cos 3x dx$.

Вариант 2

1. Найдите первообразную функции $f(x) = (x + 2)\sqrt{x}$, график которой проходит через точку $(1;\ 2)$.

2. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{x}{2x^2 + 1}dx$.

3. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = (2x + 1)^2$, график которой проходит через точку $(1;\ 4)$. Найдите $F(-1)$.

4. Докажите, что на промежутке $(1;\ \infty)$ выполняется равенство $\int \frac{x - 2}{(x - 1)^2}dx = 2\ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} + C$.

5.* Найдите неопределённый интеграл $\int \cos x \cos 2x dx$.

Вариант 3

1. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x - 1)\sqrt{x}$, график которой проходит через точку (1; 1).

2. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{x}{3x^2 + 1}dx$.

3. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = (x + 1)^3$, график которой проходит через точку (1; 3). Найдите $F(3)$.

4. Докажите, что на промежутке $(-1; \infty)$ выполняется равенство $\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx = 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + C$.

5.* Найдите неопределённый интеграл $\int \sin x \sin 4x dx$.

Вариант 4

1. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$, график которой проходит через точку (1; −1).

2. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{x}{x^2 + 3}dx$.

3. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x) = (2x - 1)^2$, график которой проходит через точку (2; 3). Найдите $F(0)$.

4. Докажите, что на промежутке $(1; \infty)$ выполняется равенство $\int \frac{x+1}{(x-1)^2}dx = 2\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$.

5.* Найдите неопределённый интеграл $\int \cos x \sin 4x dx$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7
ПО ТЕМЕ «ПЛОЩАДЬ И ОБЪЁМ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Вариант 1

1. Найдите $\int\limits_{-2}^{2}(x+1)^2dx$.

2. Вычислите площадь криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = 7 - x^2$.

4. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{4x - x^3}$, $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.

5. Найдите объём усечённой пирамиды, у которой площади оснований равны 8 и 18, а расстояние между плоскостями оснований равно 3.

Вариант 2

1. Найдите $\int\limits_{-4}^{-1} (x + 2)^2 dx$.

2. Вычислите площадь криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $b = 4$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 + x + 2$, $g(x) = 6 - x - x^2$.

4. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$, $a = \dfrac{\pi}{3}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Найдите объём усечённой пирамиды, у которой площади оснований равны 4 и 36, а расстояние между плоскостями оснований равно 6.

Вариант 3

1. Найдите $\int\limits_{0}^{4} (x - 1)^2 dx$.

2. Вычислите площадь криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 1$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 + 3x + 5$, $g(x) = 5 + 9x - x^2$.

4. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{6x - x^3}$, $a = -\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$.

5. Найдите объём усечённой пирамиды, у которой площади оснований равны 9 и 36, а расстояние между плоскостями оснований равно 3.

Вариант 4

1. Найдите $\int\limits_1^4 (x-2)^2 dx$.

2. Вычислите площадь криволинейной трапеции с границей $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $b = 4$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = x^2 - x + 4$, $d(x) = 9x - 4 - x^2$.

4. Найдите объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ в пределах от a до b, если $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$, $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{6}$.

5. Найдите объём усечённой пирамиды, у которой площади оснований равны 4 и 9, а расстояние между плоскостями оснований равно 6.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8
ИТОГОВАЯ

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_x(3x^2 - 5x + 2) \geq 2$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2\cos x} + \sin x = 0$.

3. В треугольнике ABC точки K и L расположены соответственно на сторонах AC и BC так, что $AK : KC = 2 : 1$, $BL : LC = 1 : 2$, отрезки AL и BK пересекаются в точке M. Найдите отношение $BM : MK$.

4.* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $25^x - 2 \cdot 10^x + (2a + 3) \cdot 4^x = 0$ имеет единственный корень.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 2 и высотой $SH = 4$ найдите расстояние от вершины S до плоскости, проходящей через вершину C и середины рёбер AD и SB.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\log_{(x+1)} 2x^2 \geq 1$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2\sin x} + \cos x = 0$.

3. В треугольнике ABC точки K и L расположены соответственно на сторонах AC и BC так, что $AK : KC = 1 : 4$, $BL : LC = 1 : 2$, отрезки AL и BK пересекаются в точке M. Найдите отношение $AM : ML$.

4.* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x - 4 \cdot 21^x + (5 - 2a) \cdot 49^x = 0$ имеет единственный корень.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 4 и высотой $SH = 6$ найдите расстояние от вершины B до плоскости, проходящей через вершину A и середины рёбер CD и SC.

Вариант 3

1. Решите неравенство $\log_{(x+1)}(3x^2 + x) \geq 2$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2\cos x} - \sin x = 0$.

3. В треугольнике ABC точки K и L расположены соответственно на сторонах AC и BC так, что $AK : KC = 1 : 3$, $BL : LC = 2 : 1$, отрезки AL и BK пересекаются в точке M. Найдите отношение $AM : ML$.

4.* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $9^x - 4 \cdot 12^x + (2a - 1) \cdot 16^x = 0$ имеет единственный корень.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 2 и высотой $SH = 6$ найдите расстояние от вершины S до плоскости, проходящей через вершину D и середины рёбер AB и SC.

Вариант 4

1. Решите неравенство $\log_x(2(x - 1)^2) \geq 1$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2\sin x} - \cos x = 0$.

3. В треугольнике ABC точки K и L расположены соответственно на сторонах AC и BC так, что $AK : KC = 1 : 4$, $BL : LC = 1 : 3$, отрезки AL и BK пересекаются в точке M. Найдите отношение $BM : MK$.

4.* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x - 2 \cdot 6^x + (3 - 2a) \cdot 9^x = 0$ имеет единственный корень.

5. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с ребром основания 4 и высотой $SH = 8$ найдите расстояние от вершины C до плоскости, проходящей через вершину B и середины рёбер AD и SC.

ОТВЕТЫ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. 1. $(-\infty; 1], [2; \infty)$. **2.** а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. **3.** $a = \frac{1}{2}$. **4.** $-\frac{1}{2}$.

Вариант 2. 1. $(-1{,}5; -1]$. **2.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **3.** $a = -1$. **4.** -1.

Вариант 3. 1. $[3; \infty)$. **2.** а) $\frac{5}{6}$; б) 2. **3.** $a = 7$. **4.** 2.

Вариант 4. 1. $[1{,}5; 2)$. **2.** а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{3}$. **3.** $a = \frac{7}{3}$. **4.** 1.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. 1. $\sqrt{21}$. **2.** 1,5. **3.** 9. **4.** 1.

Вариант 2. 1. $2\sqrt{10}$. **2.** $2\frac{5}{6}$. **3.** 15. **4.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Вариант 3. 1. $\sqrt{5}$. **2.** $1\frac{5}{6}$. **3.** 8. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 4. 1. $\sqrt{65}$. **2.** 3,3. **3.** 6. **4.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. 1. $-4{,}5$. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) $\frac{1}{(1+4x)\sqrt{x}}$; б) $e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$. **4.** $-\frac{1}{5}$.

Вариант 2. 1. 3,5. **2.** $2\sqrt{2}$. **3.** а) $\frac{1}{(2+x)\sqrt{x-2}}$; б) $-e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x)$. **4.** $\frac{2}{3}$.

Вариант 3. 1. $-7{,}5$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $\frac{1}{(5+4x)\sqrt{x+1}}$; б) $e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x)$. **4.** $-\frac{1}{3}$.

Вариант 4. 1. -53. **2.** $2\sqrt{3}$. **3.** а) $\frac{1}{(3+x)\sqrt{x-1}}$; б) $e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$. **4.** $-\frac{4}{5}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. **1.** $\overrightarrow{BE}$. **2.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{SC}$. **3.** $x=1+2t$, $y=-2+t$, $z=3+t$. **4.** $\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{b}+\frac{5}{2}\vec{c}$. **5.** 2 : 3.

Вариант 2. **1.** $\overrightarrow{BE}$. **2.** $-\frac{1}{6}\overrightarrow{SA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. **3.** $x=4-2t$, $y=-4+t$, $z=2+3t$. **4.** $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+2\vec{c}$. **5.** 4 : 3.

Вариант 3. **1.** $\overrightarrow{BE}$. **2.** $\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$. **3.** $x=-2+t$, $y=1-3t$, $z=1+4t$. **4.** $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\vec{c}$. **5.** 3 : 4.

Вариант 4. **1.** $\overrightarrow{BE}$. **2.** $\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. **3.** $x=1-3t$, $y=2+t$, $z=-5+t$. **4.** $\frac{5}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **5.** 5 : 4.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. **1.** $\frac{1}{x+1}$. **2.** $x=-1{,}5$, $x=2$. **3.** $y=\frac{1}{6}(x+5)$. **4.** -4; $-1{,}5$; 1. **5.** Возрастает на $(-\infty;\ -3]$, $[-1;\ \infty)$, убывает на $[-3;\ -2)$, $(-2;\ -1]$.

Вариант 2. **1.** $\frac{1}{x-1}$. **2.** $x=-1$, $x=0{,}5$. **3.** $y=-\frac{7}{4}x+9$. **4.** -2; 1,5; 5. **5.** Возрастает на $(-\infty;\ 1]$, $[5;\ \infty)$, убывает на $[1;\ 3)$, $(3;\ 5]$.

Вариант 3. **1.** $\frac{1}{x+1}$. **2.** $x=-0{,}5$, $x=2$. **3.** $y=\frac{1}{4}(x+3)$. **4.** -6; $-2{,}5$; 1. **5.** Возрастает на $(-\infty;\ -2]$, $[4;\ \infty)$, убывает на $[-2;\ 1)$, $(1;\ 4]$.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{x-1}$. **2.** $x=-3$, $x=1{,}5$. **3.** $y=\frac{52-2x}{10}$. **4.** -2; $-0{,}5$; 3. **5.** Возрастает на $(-\infty;\ -4]$, $[2;\ \infty)$, убывает на $[-4;\ -1)$, $(-1;\ 2]$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. **1.** $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right)$ и $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. **2.** 4. **3.** $y=2$ при $x\to+\infty$, $y=-2$ при $x\to-\infty$. **4.** б) При $a\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ \infty)$.

Вариант 2. **1.** $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$. **2.** 2. **3.** $y = -3$ при $x \to +\infty$, $y = 3$ при $x \to -\infty$. **4.** б) При $a \in (-\infty; -6] \cup [6; \infty)$.

Вариант 3. **1.** $[-\sqrt{3}; 0)$ и $(0; \sqrt{3}]$. **2.** 1,5. **3.** $y = -2$ при $x \to +\infty$, $y = 2$ при $x \to -\infty$. **4.** б) При $a \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty)$.

Вариант 4. **1.** $[-\sqrt{2}; 0)$ и $(\sqrt{2}; \infty]$. **2.** 1. **3.** $y = 1{,}5$ при $x \to +\infty$, $y = 1{,}5$ при $x \to -\infty$. **4.** б) При $a \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** $-\frac{1}{2}$. **2.** $\arccos\frac{4}{\sqrt{61}}$. **3.** $\arcsin\frac{5}{\sqrt{638}}$. **4.** $5x + y - 3z - 10 = 0$. **5.** $\frac{9}{73}$.

Вариант 2. **1.** $\frac{1}{6\sqrt{5}}$. **2.** $\arccos\frac{6}{\sqrt{61}}$. **3.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$. **4.** $2x + 3y - 7z - 4 = 0$. **5.** $\frac{4}{29}$.

Вариант 3. **1.** $-\frac{3}{\sqrt{35}}$. **2.** $\arccos\frac{15}{19}$. **3.** $\arcsin\frac{8}{\sqrt{77}}$. **4.** $x - 2y + 4z - 3 = 0$. **5.** $\frac{1}{10}$.

Вариант 4. **1.** $-\frac{5}{7}$. **2.** $\arccos\frac{5}{259}$. **3.** $\arcsin\frac{3}{\sqrt{308}}$. **4.** $3x - 2y - 5z + 6 = 0$. **5.** $\frac{1}{17}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** 2. **2.** $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$. **4.** $\frac{2}{9}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Вариант 2. **1.** 5. **2.** $\left(-1; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$. **3.** $(-1; 0; -2)$. **4.** $\frac{4}{9}$. **5.** $\frac{4}{\sqrt{6}}$.

Вариант 3. **1.** 1. **2.** $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 3\right)$, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$. **4.** $\frac{5}{9}$. **5.** $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Вариант 4. **1.** 3. **2.** $\left(2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{30}}{2}$. **3.** $\left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$. **4.** $\frac{4}{9}$. **5.** $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9

Вариант 1. **1.** $x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}-\frac{3}{7}\sqrt[3]{x}\right)+c$. **2.** $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x-1$. **3.** $y=\frac{6x}{x^4+5x^2+4}$. **4.** $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+c$. **5.** $\varphi(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x+c_1x+c_2$, где $c_1, c_2\in R$.

Вариант 2. **1.** $x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2}\right)+c$. **2.** $y=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x+\frac{5}{4}$. **3.** $y=\frac{4x}{x^4+4x^2+3}$. **4.** $\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x-2}+c$. **5.** $\varphi(x)=-\frac{1}{2}\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)+$ $+c_1x+c_2$, где $c_1, c_2\in R$.

Вариант 3. **1.** $x^2\left(\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{5}\sqrt{x}\right)+c$. **2.** $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{7}{3}$. **3.** $y=\frac{2x}{x^4+5x^2+6}$. **4.** $\frac{2}{3}(x-6)\sqrt{x+3}+c$. **5.** $\varphi(x)=\frac{1}{4}\sin 2x+c_1x+c_2$, где $c_1, c_2\in R$.

Вариант 4. **1.** $x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x}\right)+c$. **2.** $y=\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{3}{2}$. **3.** $y=\frac{4x}{x^4+6x^2+8}$. **4.** $\frac{2}{3}(x+6)\sqrt{x-3}+c$. **5.** $\varphi(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)+$ $+c_1x+c_2$, где $c_1, c_2\in R$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10

Вариант 1. **1.** 3. **2.** $1\frac{1}{15}$. **3.** 36. **4.** $\frac{4\pi}{3}$. **5.** 1.

Вариант 2. **1.** $3\left(\sqrt{3}-1\right)$. **2.** $1\frac{7}{8}$. **3.** 36. **4.** $\frac{2\pi}{3}$. **5.** $6\frac{2}{3}$.

Вариант 3. **1.** 3. **2.** $2\frac{2}{9}$. **3.** 36. **4.** $\frac{3\pi}{2}$. **5.** 3.

Вариант 4. **1.** $3\sqrt{3}$. **2.** $1\frac{11}{25}$. **3.** 36. **4.** π. **5.** $6\frac{2}{3}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11

Вариант 1. **1.** $\frac{9\pi}{4}$. **2.** $\frac{20\pi}{3}$. **3.** б) $\frac{\pi(3\pi+8)}{2}$. **4.** 3.

Вариант 2. **1.** $\frac{8\pi}{3}$. **2.** 30π. **3.** б) $\frac{\pi(3\pi+8)}{4}$. **4.** 8.

Вариант 3. **1.** $\frac{9\pi}{4}$. **2.** 180π. **3.** б) $\frac{\pi(9\pi-16)}{2}$. **4.** 7.

Вариант 4. **1.** $\frac{8\pi}{3}$. **2.** $\frac{15\pi}{4}$. **3.** б) $\frac{3\pi^2}{2}$. **4.** 16.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12

Вариант 1. **1.** $\frac{1}{10}$. **2.** $\frac{1}{4}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** а) $\frac{4}{11}$; б) $\frac{5}{11}$.

Вариант 2. **1.** $\frac{1}{11}$. **2.** $\frac{5}{16}$. **3.** $\frac{13}{18}$. **4.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{6}{13}$.

Вариант 3. **1.** $\frac{1}{15}$. **2.** $\frac{3}{8}$. **3.** $\frac{5}{8}$. **4.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{12}$.

Вариант 4. **1.** $\frac{1}{15}$. **2.** $\frac{5}{16}$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{7}{10}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13

Вариант 1. **1.** $\frac{16\pi}{3}$. **2.** 3. **3.** $-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi m}{2}$, $\frac{5\pi}{8}+\pi n$, $m, n \in Z$. **4.** Наименьшее 8π.

Вариант 2. **1.** $\frac{5\pi}{2}$. **2.** 4. **3.** $-\frac{\pi}{8}+\pi m$, $\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$, $m, n \in Z$. **4.** Наименьшее 14π.

Вариант 3. **1.** $\frac{18\pi}{5}$. **2.** 1,5. **3.** $\frac{\pi}{8}+\pi m$, $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$, $m, n \in Z$. **4.** Наименьшее 16π.

Вариант 4. **1.** $\frac{14\pi}{3}$. **2.** 3. **3.** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi m}{2}$, $\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $m, n \in Z$. **4.** Наименьшее 18π.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14

Вариант 1. **1.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k \in Z$. **2.** $-\frac{3}{\sqrt{10}}$. **3.** $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. **4.** $3-i$. **5.** $2\cos\alpha(\cos\alpha+\pi+i\sin\alpha+\pi)$.

Вариант 2. **1.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in Z$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **3.** $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **4.** $1-2i$. **5.** $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Вариант 3. **1.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi k, k \in Z$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **3.** $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. **4.** $2+i$. **5.** $2\sin\alpha\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Вариант 4. **1.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in Z$. **2.** $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **3.** $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **4.** $3-2i$. **5.** $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\pi+i\sin\frac{\alpha}{3}+\pi\right)$.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1. **1.** 16. **2.** $\frac{2R\sqrt{21}}{7}$. **3.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{273}}{24}$.

Вариант 2. **1.** 8. **2.** $R\sqrt{14}$. **3.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{89}}{12}$.

Вариант 3. **1.** 36. **2.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Вариант 4. **1.** 18. **2.** $\frac{4R\sqrt{7}}{9}$. **3.** 2. **4.** $\frac{\sqrt{91}}{5}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1. **1.** а) $\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$; б) $x(2\ln x + 1)$. **2.** $-1{,}6$. **3.** $\frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x)}{\sin x}$. **4.** $y = \frac{11x}{4} - \frac{9}{4}$. **5.** $\frac{1}{x^2 - 2x + 3}$.

Вариант 2. **1.** а) $-\frac{5\sqrt[3]{x^2}}{x^3}$; б) $\frac{1-x}{e^x}$. **2.** 1,8. **3.** $\frac{\sin^2 x \cdot \ln(2\sin x) - \cos^2 x}{\sin x}$. **4.** $y = 2x - 2$. **5.** $\frac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

Вариант 3. **1.** а) $\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$; б) $\frac{1 + \ln x}{x^2}$. **2.** $-\frac{8}{125}$. **3.** $\frac{\cos^2 x \cdot \ln(2\cos x) - \sin^2 x}{\cos x}$. **4.** $y = 2x$. **5.** $\frac{1}{x^2 + 2x + 7}$.

Вариант 4. **1.** а) $\frac{7x\sqrt[3]{x}}{3}$; б) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$. **2.** $\frac{9}{125}$. **3.** $\frac{2(\sin^2 x - \cos^2 x \cdot \ln \cos x)}{\cos x}$. **4.** $y = \frac{7x}{4} - 1$. **5.** $\frac{1}{4x^2 - 4x + 3}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Вариант 1. **1.** $(-2{,}2;\ 1{,}2;\ 1)$. **2.** $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{SC}$. **3.** $K\left(1; -1; \frac{4}{7}\right)$, $L\left(-1; -\frac{1}{7}; 2\right)$, $M\left(-\frac{5}{7}; 1; \frac{2}{7}\right)$. **4.** $x = -3 - 3t$, $y = 3 - 2t$, $z = -4 - 6t$. **5.** $\left(6\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$.

Вариант 2. **1.** $(0{,}2;\ -3{,}8;\ 3{,}4)$. **2.** $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{SA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{SC}$. **3.** $K\left(\frac{3}{5};\ -1;\ 2\right)$, $L\left(-1;\ 1;\ \frac{4}{5}\right)$, $M\left(1;\ \frac{1}{5};\ \frac{6}{5}\right)$. **4.** $x = 1 - 3t$, $y = -3 + 2t$, $z = -2 - t$. **5.** $\left(0;\ 1\frac{1}{4};\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Вариант 3. **1.** $(2;\ 2;\ 4)$. **2.** $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{SB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{SC}$. **3.** $K\left(1;\ -\frac{1}{7};\ 0\right)$, $L\left(-1;\ -1;\ \frac{12}{7}\right)$, $M\left(-\frac{3}{7};\ \frac{3}{7};\ 2\right)$. **4.** $x = -4 + 3t$, $y = -6 + t$, $z = 5 - 2t$. **5.** $\left(3\frac{1}{3};\ -5\frac{2}{3};\ 0\right)$.

Вариант 4. **1.** $(6;\ 0;\ -1)$. **2.** $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{SC}$. **3.** $K\left(-1;\ \frac{3}{5};\ 0\right)$, $L\left(1;\ 1;\ \frac{3}{5}\right)$, $M\left(\frac{1}{5};\ -1;\ \frac{4}{5}\right)$. **4.** $x = 2 - 4t$, $y = 5 + 3t$, $z = -7 - t$. **5.** $\left(0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Вариант 1. **1.** $y = \frac{1}{3}x + 2$. **2.** $[-2;\ -0{,}5]$ и $[1;\ \infty)$. **3.** $y = x - \frac{3}{8}$.

Вариант 2. **1.** $y = \frac{3x + 2}{4}$. **2.** $[-3;\ -0{,}5]$ и $[2;\ \infty)$. **3.** $y = x + \frac{1}{6}$.

Вариант 3. **1.** $y = \frac{5 - x}{3}$. **2.** $[1;\ 1{,}5]$ и $[2;\ \infty)$. **3.** $y = x + \frac{1}{8}$.

Вариант 4. **1.** $y = \frac{5 - 3x}{4}$. **2.** $[-4;\ -2{,}5]$ и $[-1;\ \infty)$. **3.** $y = x - \frac{1}{3}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Вариант 1. **1.** $x + 2y - z - 6 = 0$. **2.** $5x + 2y + z - 8 = 0$. **3.** $\arccos\frac{4}{\sqrt{221}}$. **4.** $\arccos\frac{119}{169}$.

Вариант 2. **1.** $2x + y3z - 14 = 0$. **2.** $x + y + z - 1 = 0$. **3.** $\arccos\sqrt{\frac{19}{23}}$. **4.** $\arccos\frac{29}{61}$.

Вариант 3. **1.** $3x + y - z + 11 = 0$. **2.** $y + z - 2 = 0$. **3.** $\arccos\frac{2}{7}$. **4.** $\arccos\frac{59}{141}$.

Вариант 4. **1.** $2x - 3y + z + 14 = 0$. **2.** $x + y - 1 = 0$. **3.** $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{15}}$. **4.** $\arccos\dfrac{89}{361}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Вариант 1. **1.** $\dfrac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} - \dfrac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} + \dfrac{4}{15}$. **2.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$. **3.** $-2\dfrac{3}{4}$. **4.** *Указание.* $\dfrac{2x + 3}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2}$. **5.** $\dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{8}\cos 4x + C$.

Вариант 2. **1.** $\dfrac{2}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + \dfrac{4}{3}x \cdot \sqrt{x} + \dfrac{4}{15}$. **2.** $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2 + 1) + C$. **3.** $-\dfrac{2}{3}$. **4.** *Указание.* $\dfrac{x - 2}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}$. **5.** $\dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{6}\sin 3x + C$.

Вариант 3. **1.** $\dfrac{4}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} - \dfrac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} + \dfrac{13}{15}$. **2.** $\dfrac{1}{6}\ln(3x^2 + 2) + C$. **3.** 63. **4.** *Указание.* $\dfrac{2x + 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2}$. **5.** $\dfrac{1}{6}\sin 3x - \dfrac{1}{10}\sin 5x + C$.

Вариант 4. **1.** $\dfrac{4}{5}x^2 \cdot \sqrt{x} + \dfrac{2}{3}x \cdot \sqrt{x} + \dfrac{37}{15}$. **2.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 3) + C$. **3.** $-1\dfrac{2}{3}$. **4.** *Указание.* $\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{(x - 1)^2}$. **5.** $-\dfrac{1}{6}\cos 3x - \dfrac{1}{10}\cos 5x + C$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

Вариант 1. **1.** $21\dfrac{2}{3}$. **2.** $5\dfrac{3}{8}$. **3.** 9. **4.** 6π. **5.** 38.

Вариант 2. **1.** 3. **2.** 23. **3.** 9. **4.** $\dfrac{\pi}{4}$. **5.** 104.

Вариант 3. **1.** $9\dfrac{1}{3}$. **2.** $3\dfrac{7}{12}$. **3.** 9. **4.** $\dfrac{27\pi}{2}$. **5.** 63.

Вариант 4. **1.** 3. **2.** 9,5. **3.** 9. **4.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$. **5.** 38.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1. **1.** $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup [2; \infty)$. **2.** $-\arccos\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** $2 : 1$. **4.** $(-\infty; -1{,}5) \cup \{-1\}$. **5.** $\dfrac{16}{\sqrt{105}}$.

Вариант 2. **1.** $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; \infty)$. **2.** $\pi - \arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** 3 : 4. **4.** $\{0{,}5\} \cup [2{,}5; \infty)$. **5.** $\frac{8}{\sqrt{6}}$.

Вариант 3. **1.** $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup [1; \infty)$. **2.** $\arccos\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** 1 : 2. **4.** $(-\infty; 0{,}5) \cup \{2{,}5\}$. **5.** $\frac{24}{\sqrt{205}}$.

Вариант 4. **1.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup [2; \infty)$. **2.** $\arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k,\ k \in Z$. **3.** 5 : 3. **4.** $\{1\} \cup [1{,}5; \infty)$. **5.** $\frac{32}{\sqrt{105}}$.

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4
Глава 1								
§ 1	4	3	4	2	1, 2	1, 4	1, 2	3, 4
§ 2	2	1	2	1	1, 2	1, 2, 4	2, 3, 4	1, 2
§ 3	3	2	3	2	1, 2, 3	2, 3, 4	1, 4	1, 3, 4
§ 4	1	4	3	4	3, 4	1, 3, 4	3	3, 4
§ 5	2	1	3	2	2, 3, 4	1, 3	1, 2, 3	1, 2, 3
Глава 2								
§ 1	3	3	4	2	2, 3	1, 3	1, 3	1, 2, 3, 4
§ 2	2	3	3	2	2, 3	2	4	2, 3
§ 3	2	1	3	4	1, 2	1, 2, 3	1	2, 3, 4
§ 4	2	1	3	4	2, 4	1, 2, 3	3, 4	4
Глава 3								
§ 1	1	2	2	1	1, 4	1, 3	1, 3, 4	1, 2
§ 2	4	4	4	4	1, 2, 4	1, 3	1, 3, 4	2
§ 3	2	4	2	1	3	2, 4	1, 4	2, 4
Глава 4								
§ 1	2	4	1	2	3, 4	2, 4	1, 2, 3	3, 4
§ 2	4	2	2	1	1, 3, 4	1, 2, 3, 4	3, 4	1, 3, 4
§ 3	4	2	2	1	3	1, 4	4	1, 2, 3
§ 4	3	2	2	1	1, 2	1, 3	2	2, 3, 4
§ 5	3	4	3	3	2	1, 4	1	1, 3, 4

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
Глава 5								
§ 1	1	1	3	4	2	2, 4	1, 2, 4	2, 3
§ 2	2	3	4	2	1, 2, 3	1	1, 2, 3, 4	1, 4
§ 3	4	3	2	3	1, 4	2	3	1, 4
§ 4	2	4	3	1	1, 2	2, 3	2, 4	4
Глава 6								
§ 1	4	2	4	4	1, 3, 4	3, 4	2, 3	2
§ 2	3	4	4	3	2	1, 4	1, 2, 3, 4	1, 2, 3
§ 3	3	4	1	3	1, 3, 4	2, 3	2, 3, 4	3, 4
§ 4	2	2	1	3	3	1, 3	1, 4	1
§ 5	4	1	4	4	2, 3	1, 3, 4	1	1, 2
§ 6	1	3	2	3	1, 3, 4	1, 4	1, 4	2, 3, 4
§ 7	3	3	4	1	1	2, 4	1, 4	2, 3
Глава 7								
§ 1	1	3	2	4	3, 4	2, 3	4	2, 4
§ 2	1	4	4	2	1, 4	2, 4	1	2
§ 3	2	4	4	2	2, 4	1, 3	1, 2, 3, 4	1, 3
Глава 8								
§ 1	1	1	1	2	1, 2, 3	1, 2, 4	1, 4	2, 4
§ 2	4	3	2	2	1, 3, 4	2	1, 2	2, 3
§ 3	2	4	4	4	2, 4	1, 4	1, 2, 3	1, 3, 4
§ 4	3	3	3	3	1, 3, 4	1, 2, 3	1, 4	2, 3, 4

	Задание 1				Задание 2			
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**
Глава 9								
§ 1	3	3	4	3	1, 2, 4	1, 2, 3	1, 3, 4	1
§ 2	2	1	2	2	2, 4	1, 2, 3	3, 4	1, 2, 3, 4
§ 3	2	1	2	3	1, 3, 4	1, 2, 4	2, 3	2, 3, 4
§ 4	1	2	3	2	1, 2	1, 3	1, 2, 3	2, 4
Глава 10								
§ 1	2	3	3	4	2, 3, 4	1, 4	2, 3	2, 4
§ 2	2	3	2	1	1, 3	3, 4	1	4
§ 3	4	2	1	3	2, 3, 4	3, 4	2, 3, 4	1
Глава 11								
§ 1	4	1	4	2	1, 2, 3	4	1	1, 3, 4
§ 2	3	2	3	4	3	1, 3	1, 3	2, 4
Глава 12								
§ 1	4	3	4	3	2	1, 2, 4	2	1, 4
§ 2	3	2	2	1	2, 3	3	1, 3	3, 4
§ 3	2	4	1	2	1, 2, 3, 4	1, 2	2, 3	2, 4
§ 4	3	4	3	3	2, 4	2	1, 4	2, 4
§ 5	3	1	2	1	2, 3, 4	4	1, 2, 3	2, 3

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое издание

ФГОС

Инновационная школа

Козлов Валерий Васильевич
Никитин Александр Александрович
Белоносов Владимир Сергеевич
Мальцев Андрей Анатольевич
Марковичев Александр Сергеевич
Михеев Юрий Викторович
Фокин Михаил Валентинович

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
к учебнику «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» под редакцией академика РАН *В.В. Козлова* и академика РАО *А.А. Никитина* для 11 класса общеобразовательных организаций

Редактор *Е.В. Лебедева, А.А. Ляшенко*
Художественный редактор *А.С. Побезинский*
Корректоры *Г.А. Голубкова, О.И. Ощепкова*
Вёрстка *Л.Х. Матвеевой, М.О. Кошелева*

Подписано в печать 09.10.17. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20. Тираж. Заказ
Изд. № 16302.

ООО «Русское слово — учебник».
125009, Москва, ул. Тверская, д. 9, стр. 5.
Тел.: (495) 969-24-54, (499) 689-02-65
(отдел реализации и интернет-магазин).

Вы можете приобрести книги в интернет-магазине:
www.russkoe-slovo.ru
e-mail: zakaz@russlo.ru